
今日の予定

- hypercategory with matroid interface(続き)
 - hypercategory with operations
-

(12.2) **射の併置** hypercategory の 2 つの射 φ_i ($i = 1, 2$) に対して、mix 射 $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ が $\partial(\varphi_1 \otimes \varphi_2) := \partial\varphi_1 + \partial\varphi_2$ により定義される。mix として構成されたという経緯は、interface の matroid 構造にかなり忠実に記録されている。

(12.2) polycategory

(12.2.a) hypercategory with matroid interface $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ が polycategory であるとは、

$$\mathcal{H}_0 = A \amalg \overline{A}$$

であって、各射 φ について $\partial_{in}\varphi := \{a \mid [a] \in A\}$ は基底である。このとき

$$\overline{\partial_{in}\varphi} \supset \partial_{out}\varphi := \{a \mid [a] \in \overline{A}\}$$

である。

(12.2.b) **補題.** $I \subset \partial_{out}\varphi_1$ と全単射 $\kappa : I \rightarrow \partial_{in}\varphi_2$ に対して、matroid 合成 $\partial\varphi_1 \Delta_\kappa \partial\varphi_2$ は、

$$\partial_{in}\varphi_1 \cup \partial_{in}\varphi_2 \setminus \kappa I$$

を基底とする。とくに、階数は正となる。

(12.2.c) **問題.** 上の補題を証明せよ。

(12.2.d) これにより、合成 $\varphi_1 \circ_\kappa \varphi_2$ が定義される。明らかに、

$$\partial_{in}(\varphi_1 \circ_\kappa \varphi_2) = \partial_{in}\varphi_1 \cup \partial_{in}\varphi_2 \setminus \kappa I$$

となる。

13. hypercategory with operations

- (13.1) $(\Sigma, \{ |\sigma| \mid \sigma \in \Sigma \})$ を matroid signature とする。すなわち、 Σ は有限集合、で $|\sigma|$ は $\{0, 1, 2, \dots, n_\sigma\}$ 上の matroid 構造とする。

定数集合 $\mathcal{H}_0$ と matroid signature $\Sigma := (\Sigma, \{ |\sigma| \})$ に対して、 σ と $\bar{\sigma}$ を arity n_σ の作用素とみなして構成される項の全体を $\Sigma[\mathcal{H}_0]$ とかく。この上に involution を

$$\overline{\sigma(t_1, \dots, t_n)} := \bar{\sigma}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$$

と定義する。以下 $\{ \sigma, \bar{\sigma} \}$ を Σ と書く。

hypercategory $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ と matorid signature Σ から生成される hypercategory $\Sigma[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ とは、 $\Sigma[\mathcal{H}_0]$ を対象とし、 $\mathcal{H}_1$ と次の射を生成元とするものをいう：

$$\{ \varphi[\sigma, t_1, \dots, t_{n_\sigma}] \mid \sigma \in \Sigma, t_i \in \Sigma[\mathcal{H}_0] \}$$

ただし、 t_i は項とし、この interface matorid は $|\sigma|$ で、型は $[0] := \sigma(t_1, t_2, \dots, t_{n_\sigma})$, $[i] := t_i$ となるものである。ここで、 $|\bar{\sigma}| := |\sigma|^*$. これらの射を**特殊射**と呼ぶ。

- (13.2) **特殊射と関係による hypercategory** 特殊射の間のいくつかの関係 $\mathcal{R}$ の生成する congruence relation による $\Sigma[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ の商を $\Sigma[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]/\mathcal{R}$ と書く。

- (13.3) **このあとの概略** 作用素と関係を適当に選ぶ事で、Milner の Action calculus や 乗法的線形論理の証明網や、geometry of interaction と同内容のものは hypercategory の枠組みで表現できると思われる。

また、インタフェースの構造化により相互作用を特化するという、相互作用記述の一般的な枠組みを hypercategory により与えられると思われる。

結語 動的系としての複雑系の数学的記述の吟味をテーマとしたいくつかの枠組みを紹介したが、いずれも十分には議論できなかった。ことに、講義の過程で分散系の記述に不可欠と気付いた種々の「幾何学的な」枠組みの調査と吟味はほとんど手がつけられなかった。これは、今後の課題の一つとしたい。

レポートについて 単位の必要な人は講義資料にある問題の少なくとも一つを解く（試みをする）か、卒業研究あるいは大学院での研究テーマについて考察し、報告を提出せよ。後者の場合は1200字～2000字程度にまとめよ。（4年生とM2は）2月23日12時まで、M1は3月5日までに、4-403室に提出。

追加問題

[問題 15-1] 次数の小さいマトロイドを数え上げよ。

[問題 15-2] マトロイドの張り合わせをサーキットの言葉で与えよ。

[問題 15-3] 具体的なマトロイドの張り合わせを計算せよ。

[問題 15-4] 一般の deductive hyperdigraph の張り合わせ方法を考えよ。