

今日の予定

- マトロイドの合成
- hypercategory with matroid interface

(11.4) matroid の演算 M, M_1, M_2 を matroid とする。

(11.4.a) 制限 部分集合 $T \subset S$ に対して

$$M|T := (T, \mathcal{I} \cap \text{pow}(T))$$

は matroid となる。これを部分集合 T への制限と呼ぶ。 $M|T$ の階数写像は M の階数写像の $\text{pow}(T)$ への制限である。

(11.4.b) contraction 部分集合 $T \subset S$ に対して

$$M.T := (T, \{ X \subset T \mid X \cup B \in \mathcal{I} \text{ となる } M|(S \setminus T) \text{ の基底 } B \text{ が存在する} \},$$

は matroid となる。これを部分集合 T への contraction と呼ぶ。 $M.T$ の階数写像 ρ^T は

$$\rho^T(A) = \rho(A \cup (S \setminus T)) - \rho(S \setminus T).$$

(11.4.c) マトロイドの直和 $S_1 \amalg S_2$ 上で $\{ A_1 \amalg A_2 \mid A_i \in \mathcal{I}_i (i = 1, 2) \}$ はマトロイドの独立集合族となる。これを $M_1 + M_2$ と書く。

(11.4.d) bipartite graph によるマトロイドの誘導 bipartite graph $(S \amalg T, \Delta \subset S \times T \cup T \times S)$ があるとき、 S 上のマトロイド M から T 上のマトロイド $\Delta(M)$ を構成できる、すなわち

$$(T, \{ Y \mid \exists f : Y \rightarrow S [\forall x \in X [fx \Delta x] \wedge f_* Y \in \mathcal{I}_M \wedge f \text{ は単射}] \})$$

はマトロイドとなる。ただし、 $\Delta J := \{ s \in S \mid \exists j \in J [s \Delta j] \}$ 。

証明 $\text{pow } T \ni J \mapsto \mu J := \rho \Delta J$ は submodular. 実際、

$$\begin{aligned} \Delta(J_1 \cup J_2) &= \Delta J_1 \cup \Delta J_2 \\ \Delta(J_1 \cap J_2) &\subset \Delta J_1 \cap \Delta J_2 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \mu(J_1 \cup J_2) &= \rho(\Delta J_1 \cup \Delta J_2) \\ &\leq \rho \Delta J_1 + \rho \Delta J_2 - \rho(\Delta J_1 \cap \Delta J_2) \\ &\leq \rho \Delta J_1 + \rho \Delta J_2 - \rho \Delta(J_1 \cap J_2) \\ &= \mu J_1 + \mu J_2 - \mu(J_1 \cap J_2) \end{aligned}$$

従って、 $\{ J \subset T \mid \rho \Delta J \geq |J| \}$ はあるマトロイドの独立集合族となる。Rado の定理によりこれは丁度 ΔM と一致する。

(11.4.e) 和 $M_i = (S, \mathcal{I}_i)$ ($i = 1, 2$) に対して、

$$M_1 \vee M_2 := (S, \{X_1 \cup X_2 \mid X_i \in \mathcal{I}_i (i = 1, 2)\})$$

は matroid となる。階数写像は

$$\rho A = \min_{B \subset A} \{\rho_1 B + \rho_2 B + |A \setminus B|\}$$

で与えられる。

証明 $S \amalg S$ と S の間の自明な bibartite graph を Δ とすると、 $M_1 \vee M_2 = \Delta(M_1 + M_2)$

.

(11.4.f) 双対

$$M^* := (S, \{X \mid X \cap B = \emptyset \text{ となる基底 } B \text{ が存在する}\})$$

は matroid となる。 $\{S \setminus B \mid B \in \mathcal{B}_M\}$ は M^* の基底となる。したがって、 $M^{**} = M$ となる。 M^* の階数 ρ^* は次の式を満たす:

$$\rho^*(S \setminus A) = (|S| - \rho S) - (|A| - \rho A).$$

証明 $\lambda A := |A| + \rho(S \setminus A) - \rho S$ とおく。 $A \mapsto |A| - \rho S$ は modular、 $A \mapsto \rho(S \setminus A)$ は summodular なので、 λ も submodular となる。また $A \subset B$ のとき、

$$\begin{aligned} \rho(S \setminus A) &= \rho((S \setminus B) \cup (B \setminus A)) \\ &\leq \rho(S \setminus B) + \rho(B \setminus A) \\ &\leq \rho(S \setminus B) + |B \setminus A| \end{aligned}$$

従って、

$$|A| + \rho(S \setminus A) \leq |B| + \rho(S \setminus B)$$

となり、 λ は非減少となる。また $\lambda A \leq |A|$ は明か。故に λ はあるマトロイドの階数写像となる。最後に

$$\lambda A = |A| \iff \rho(S \setminus A) = \rho A \iff S \setminus A \text{ は基底を含む.}$$

(11.4.g) 交わり $M_1 \wedge M_2 := (M_1^* \vee M_2^*)^*$ は、

$$(\{X_1 \cap X_2 \mid X_i \text{ は } M_i \text{ の基底を含む } (i = 1, 2)\}, \subset)$$

の極小元を基底とするマトロイドとなる。

(11.4.h) 貼合わせ M_i ($i = 1, 2$) を matroid とし、 $\kappa_i : T \rightarrow S_i$ ($i = 1, 2$) を単射とする。 S_i ($i = 1, 2$) の κ による張り合わせを $S := S_1 \cup_\kappa S_2 := S_1 \amalg S_2 / \kappa_1 t \sim \kappa_2 t$ とし、 S_i を S の部分集合とみなす。このとき、 M_i の κ による張り合わせ $M_1 \cup_\kappa M_2$ が、 S 上のマトロイドとして次のように定義される： $M'_i := M_i + P_i$ を S_i 上のマトロイド M_i の S 上への拡大とする、ただし、 P_i は $S \setminus S_i$ 上の自由マトロイド、すなわち任意の部分集合を独立集合とするマトロイドを表す。そして、

$$M_1 \cup_\kappa M_2 := M'_1 \wedge M'_2$$

と定義する。交わりの定義より、 $X_i \subset S_i$ が M_i の基底を含む集合を動かすときに

$$(X_1 \setminus S_2) \cup (X_2 \setminus S_1) \cup (X_1 \cap X_2 \cap S_1 \cap S_2)$$

が成す集合族の包含関係に関する極小元が基底となる。

(11.4.i) 貼り合わせと隠ぺい 前節の $M_1 \cap_{\kappa} M_2$ を $S \setminus (S_1 \cup S_2)$ に制限したものを $M_1 \Delta_{\kappa} M_2$ と書く。

(11.4.j) 例

(11.4.j.i) $S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{3, 4, 5\}, M_1 := U_1(S_1), M_2 := U_2(S_2)$ とする。このとき、

	基底
M_1	$\{1, 2, 3\}$
M_2	$\{34, 35, 45\}$

従って、これらより

	1	2	3
34	14	24	34
35	15	25	35
45	145	245	45

となり、 $M_1 \cup_{\{3\}} M_2$ の基底は $\{14, 15, 24, 25, 34, 35, 45\}$ となる。

また、これより $M_1 \Delta_{\{3\}} M_2$ の基底は $\{14, 15, 24, 25, 45\}$ となる。長さ 2 の circuit は 12 のみ。

(11.4.j.ii) $S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{2, 3, 4\}, M_1 := U_1(S_1), M_2 := U_2(S_2)$ とする。このとき、

	基底
M_1	$\{1, 2, 3\}$
M_2	$\{23, 24, 34\}$

従って、これらより

	1	2	3
23	1	2	3
24	14	24	4
34	14	4	3

となり、 $M_1 \cup_{\{2,3\}} M_2$ の基底は $\{1, 2, 3, 4\}$ となる。

また、これより $M_1 \Delta_{\{2,3\}} M_2$ の基底は $\{1, 4\}$ となる。

(11.4.j.iii) $S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{2, 3, 4\}, M_1 := U_1(S_1), M_2 := U_1(S_2)$ とする。このとき、

	基底
M_1	$\{1, 2, 3\}$
M_2	$\{2, 3, 4\}$

従って、これらより

	1	2	3
2	1	2	$\emptyset$
3	1	$\emptyset$	3
4	14	4	3

となり、 $M_1 \cup_{\{2,3\}} M_2$ は $\emptyset$ を基底とするので階数 0 となる。また、これより $M_1 \Delta_{\{2,3\}} M_2$ も階数 0 となる。

(11.4) 補足 S 上の個数が k 個以下の部分集合全体はマトロイドを決める。これを階数 k の一様マトロイドといい $M_k(S)$ と書く。 $M_{|S|}(S)$ を自由マトロイドという。

12. hypercategory with matroid interface

(12.1) $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ は次の条件を満たすとき *hypercategory* であるという。

H1 $\mathcal{H}_0$ は対象の集まりで、involution τ を持つ。 $\bar{a} := \tau a$ と書く。

H2 $\mathcal{H}_1$ は射の集まりで、各射には matroid $\partial\varphi = (|\partial\varphi|, \mathcal{I}_{\partial\varphi})$ と、型写像 $|\partial\varphi| \ni \alpha \mapsto [\alpha] \in \mathcal{H}_0$ が対応している。

H3 射 φ と、マトロイド同型 $\sigma : \partial\varphi \rightarrow M$ に対して、次のような射 $\sigma.\varphi$ が存在する

- $\partial(\sigma.\varphi) = M$,
- $[\sigma\alpha] = [\alpha]$ for all $\alpha \in |\partial\varphi|$.

さらに、

$$\begin{aligned} \text{id}_{\partial\varphi}.\varphi &= \varphi \\ \sigma.(\tau.\varphi) &= (\sigma\tau).\varphi \end{aligned}$$

が成り立つ。

H4 各対象 a に対して、 $\partial 1_a = U_1(\{1, 2\})$, $[1] = a$, $[2] = \bar{a}$ を満たす射 1_a が存在し、 $(1, 2).1_a = 1_{\bar{a}}$ を満たす。

H5 2つの射 φ_i ($i = 1, 2$) と単射 $\kappa_i : T \rightarrow |\partial\varphi_i|$ ($i = 1, 2$) で

$$\forall t \in T. \overline{[\kappa_1 t]} = [\kappa_2 t]$$

を満たすものに対して cut と呼ばれる射 $\varphi_1 \circ_{\kappa} \varphi_2$ が存在し、

$$\partial(\varphi_1 \circ_{\kappa} \varphi_2) = \partial\varphi_1 \Delta_{\kappa} \partial\varphi_2$$

を満たし、タイプはもとのタイプを継承する。

これは次の4つの性質を持つ。

H6 cut は可換である、すなわち、自然な同型

$$\tau : \partial\varphi_1 \Delta_{\kappa} \partial\varphi_2 \rightarrow \partial\varphi_2 \Delta_{\kappa} \partial\varphi_1$$

について

$$\tau.\varphi_1 \circ_{\kappa} \varphi_2 = \varphi_2 \circ_{\kappa} \varphi_1.$$

H7 cut は interface の名前の変換と整合的である。

H8 恒等射の性質

H9 結合法則