

11. Matroid

独立性と従属性は、システムを構成する諸要素間関係についての基本概念の一对として普遍的に言及されるが、その意味は多様である。例えば、関数関係においては変数の従属性が一次的概念で、独立性は二次的に定義されるのに対して、確率変数では独立性が一次的な概念としてとらえられる。

多成分系のコヒーレンスの数学的表現の中で、従属性を主体としたものが deductive hypedigraph で与えられる。この表現法では、独立性概念は派生的に定義されるが、この独立性を用いて、従属性概念が規定できるわけではない。

matroid は特殊な deductive hyperdigraph であるが、独立性と従属性とが互いに相手を定めており、数学的構造として深さと広さを兼ね備えていて現在も離散数学の広い分野で中心的なテーマ・道具の一つとなっている。

(11.1) 定義 有限集合 S とその部分集合族 $\mathcal{I}$ が次の三条件を満たすとき 対 $(S, \mathcal{I})$ を matroid と呼ぶ：

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(I2) $X \in \mathcal{I}$ ならば、 X の部分集合は $\mathcal{I}$ に属す、

(I3) U, V が $\mathcal{I}$ に属し、 U の個数が V の個数より大きければ、 $V \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ となるような要素 $x \in U \setminus V$ が存在する。

(11.2) 基本概念 以下 $M = (S, \mathcal{I})$ を matroid とする。

(11.2.a) $\mathcal{I}$ の元を独立集合、 $\mathcal{I}$ に属さない部分集合を 従属集合と呼ぶ。

$\mathcal{I}$ に包含関係による順序を入れたとき、極大な元を M の 基底と呼ぶ。基底の全体を $\mathcal{B}(M)$ と書く。

(11.2.b) 階数 matroid の 階数写像 $\rho : \text{pow}(S) \rightarrow \mathbb{N}$ を次式で定義する：

$$\rho A := \max \{ |X| \mid X \in \mathcal{I} \cap \text{pow}(A) \} \quad (A \subset S).$$

$\rho M := \rho S$ を matroid M の階数と呼ぶ。定義より、

$$X \in \mathcal{I} \iff \rho X = |X|.$$

定理. ρ は submodular function となる、すなわち、

$$\rho(X \cup Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) - \rho(X \cap Y)$$

が任意の $X, Y \subset S$ について成立する。

(証明の概略) $X \cap Y$ の中の極大な独立集合 Z_{12} をとる。次に、これを含む X の中の極大な独立集合を $Z_{12} \amalg Z_1$ とする。最後に、これを含む $X \cup Y$ の中の極大独立集合を $Z_{12} \amalg Z_1 \amalg Z_2$ ($Z_2 \subset Y \setminus X \cap Y$) とする。すると $|Z_1| + |Z_{12}| = \rho X$ かつ、 $|Z_2| + |Z_{12}| \leq \rho Y$ となるので

$$\begin{aligned} \rho(X \cup Y) &= |Z_1| + |Z_2| + |Z_{12}| \\ &= |Z_1 \amalg Z_{12}| + |Z_2 \amalg Z_{12}| - |Z_{12}| \\ &\leq \rho X + \rho Y - \rho(X \cap Y) \end{aligned}$$

逆に、submodular function の概念に基づいて matroid を定義することも可能である。

定理 $\rho : \text{pow}(S) \rightarrow \mathbb{N}$ が三条件

(R1) $\rho \emptyset = 0$,

(R2) $\rho X \leq |X|$,

(R3) ρ は submodular function,

を満たすとき、

$$\mathcal{I} := \{ X \mid \rho X = |X| \}$$

は matroid となり、その階数写像はちょうど ρ となる。

(証明の概略) $|X| = \rho X < |Y| = \rho Y$ とする。ある $y \in Y$ について $\rho(X \cup y) = |X| + 1$ を示せばよい。背理法で示す。 $\forall y \in Y [\rho(X \cup y) = |X|]$ とする。このとき、 $\rho(X \cup Z) = \rho(X)$ が $Z \subset Y$ について成り立つことが $|Z|$ についての帰納法で示せる： $Z_1, Z_2 \subset Y$ が互いに素であるとき

$$\begin{aligned} \rho X &\leq \rho(X \cup Z_1 \cup Z_2) \\ &\leq \rho(X \cup Z_1) + \rho(X \cup Z_2) - \rho X \\ &= \rho X + \rho X - \rho X = \rho X. \end{aligned}$$

すると $\rho Y \leq \rho(X \cup Y) = \rho X$ となってしまう矛盾。

また、このように定義された matroid の階数写像を ρ' とするとき $\rho'(A) = n$ ならば $|X| = \rho(X) = n$ となる X があるが、どの $a \in A$ についても $|X| + 1 > \rho(X \cup a)$ となるので、上と同様に、 $\rho(A) = \rho(X) = n = \rho'(A)$ となる。

(11.2.c) 一般の submodular function の定める matroid $\mu : \text{pow}(S) \rightarrow \mathbb{N}$ が submodular で $\mu \emptyset = 0$ であるとき

$$\mathcal{I}(\mu) := \{ X \mid \mu C \geq |X \cap C| \forall C \subset S \}$$

は matroid となり、その階数写像 ρ は

$$\rho X = \inf_C (\mu C + |X \setminus C|)$$

となる。

(証明の概略) $\nu X := \inf_C (\mu C + |X \setminus C|)$ とおくと、 ν は明らかに $\nu X \leq |X|$ を満たす。さらに ν は submodular である。実際

$$\begin{aligned} \nu X + \nu Y &= \inf_{A, B} \{ \mu X + |X \setminus A| + \mu Y + |Y \setminus B| \} \\ &\geq \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) + |X \cup Y \setminus (A \cup B)| + |X \cap Y \setminus (A \cap B)| \\ &\geq \nu(X \cup Y) + \nu(X \cap Y) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} |X \setminus A| + |Y \setminus B| &= |X \cup Y \setminus (A \cup B)| + |X \cap Y \setminus (A \cap B)| \\ &\quad + |X \cap B \setminus (A \cup Y)| + |Y \cap A \setminus (B \cup X)| \end{aligned}$$

を用いた。したがって、 $\{ X \mid \nu X = |X| \} = \mathcal{I}(\mu)$ は matroid となる。

(11.2.d) 閉作用素 matroid M に対して、 $\vdash_M \subset \text{pow}(S) \times S$ を

$$\Gamma \vdash_M s \iff \rho(\Gamma \cup \{s\}) = \rho\Gamma$$

と定義する。

定理. $\vdash_M$ は deductive hyperdigraph となる、すなわち、

(i) $X \vdash_M x \quad \forall x \in X$,

(ii)

$$X \vdash_M a, \quad Y \cup \{a\} \vdash_M b \Rightarrow X \cup Y \vdash_M b.$$

(証明の概略) まず

補題 1. $\rho(X \cup y) = \rho X$ ならば、 X を含む任意の集合 Z に対して $\rho(Z \cup y) = \rho Z$.

証明: $(X \cup \{y\}) \cap W = \emptyset$ のとき、

$$\rho(X \cup W) \leq \rho(X \cup W \cup y) \leq \rho(X \cup y) + \rho(X \cup W) - \rho X = \rho(X \cup W).$$

$X \vdash a, Y \cup a \vdash b$ とする。すなわち $\rho(X \cup a) = \rho X$ かつ $\rho(Y \cup a \cup b) = \rho(Y \cup a)$ とする。補題より

$$\begin{aligned} \rho(X \cup Y) &\leq \rho(X \cup Y \cup b) \\ &\leq \rho(X \cup Y \cup a \cup b) \\ &= \rho(X \cup Y \cup a) \\ &= \rho(X \cup Y). \end{aligned}$$

したがって $X \cup Y \vdash b$ となる。 $\square$

このことから

$$C_M(X) := \{s \in S \mid X \vdash_M s\}.$$

で定義される写像 $C_M : \text{pow}(S) \rightarrow \text{pow}(S)$ は閉作用素 となる、すなわち、

(CL1) $X \subset C_M(X)$,

(CL2) $X \subset Y$ ならば $C_M(X) \subset C_M(Y)$,

(CL3) $C_M(C_M(X)) = C_M(X)$,

が成り立つ。さらに

(CL4) $y \in C_M(X \cup \{x\}) \setminus C_M X \Rightarrow x \in C_M(X \cup \{y\})$,

も成り立つ。

$C_M(X) = X$ となる集合 X を閉集合という。閉集合を用いて独立性を特徴付けることもできる: すなわち X が独立であるためには、 $\{X \cap Y \mid Y \text{ は閉集合}\} = \text{pow}(X)$ となる必要十分である。

閉集合の全体は S 上の topped intersection structure となる。これは、包含関係による順序による順序集合として geometric lattice となる、すなわち、semimodular lattice でありかつ、どの元もアトムとの和で書ける。ただし、seminodular lattice とは、 x, y が $x \wedge y$ の直後の元であれば、 $x \vee y$ は x, y の直後元であることをいう。また、アトムとは最小元の直後の元のことをいう。逆に geometric lattice は適当な matroid の閉集合全体の lattice となることが知られている。

(11.2.e) circuit 極小な従属集合を circuit と呼ぶ。circuit の全体を $\mathcal{C}$ と書くと、この部分集合族は次の性質を満たす:

(C1) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ が違えば $C_1 \not\subset C_2$,

(C2) 異なる $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ が共通元 x を持てば、 $C \subset C_1 \cup C_2 \setminus \{x\}$ を満たす $C \in \mathcal{C}$ が存在する。

(C2) の証明：背理法による。 $C_1 \cup C_2 \setminus \{x\}$ が circuit を含まないとして独立である。したがって、

$$\rho(C_1 \cup C_2 \setminus x) = |C_1 \cup C_2 \setminus x| = |C_1 \cup C_2| - 1.$$

$C_1 \cup C_2$ は従属集合、 $C_1 \cap C_2$ は独立集合だから

$$\begin{aligned} |C_1 \cup C_2| - 1 &= \rho(C_1 \cup C_2 \setminus x) \\ &= \rho(C_1 \cup C_2) \\ &\leq \rho C_1 + \rho C_2 - \rho(C_1 \cap C_2) \\ &\leq |C_1| - 1 + |C_2| - 1 - |C_1 \cap C_2| = |C_1 \cup C_2| - 2 \end{aligned}$$

となり矛盾。

なお、(C1-2) から (C2) より強い次の条件が導かれる。(cf. [Welsh p24])

(C2') 異なる $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ が共通元 x を持てば、任意の $y \in C_1 \setminus C_2$ に対して y を含みかつ $C \subset C_1 \cup C_2 \setminus \{x\}$ を満たす $C \in \mathcal{C}$ が存在する。

S の部分集合 X が独立なこと circuit を含まないことは同値であることは容易に示される。実は、circuit の概念に基づいて matroid を定義することもできる：

定理 $(C1, 2)$ を満たす集合族 $\mathcal{C} \subset \text{pow}(S)$ があるとき、

$$\mathcal{I} := \{ X \subset S \mid \text{pow}(S) \cap \mathcal{C} = \emptyset \}$$

とおくと、 $(S, \mathcal{I})$ は matroid となり、その circuit の全体が丁度 $\mathcal{C}$ となる。

(証明の概略) $X, Y \in \mathcal{I}$ で $|X| < |Y|$ とする。もしも、どの $y \in Y$ についても $X \cup y \notin \mathcal{I}$ である場合、各 $y \in Y$ に対して $C_y \in \mathcal{C}$ が存在して $C_y \subset X \cup y$ かつ、 $y \in C_y$ 。 $X \cap C_y$ の部分を順次「消去」していくと、最終的に、 Y の中の $\mathcal{C}$ の元が作れてしまうので矛盾。

(11.3) 例

(11.3.a) 線形 matroid 線形空間 V の部分集合 S について $\mathcal{I} := \{ B \mid B \text{ は一次独立} \}$ とおくと、 $(S, \mathcal{I})$ は matroid となる。

(11.3.b) グラフ matroid (V, E) を対称グラフとすると、 $\mathcal{C} := \{ C \mid C \text{ は極小サイクル} \}$ は、matroid の circuit の集まりとなる。

(11.4) matroid の演算 M, M_1, M_2 を matroid とする。

(11.4.a) 制限 部分集合 $T \subset S$ に対して

$$M|T := (T, \mathcal{I} \cap \text{pow}(T))$$

は matroid となる。これを部分集合 T への制限と呼ぶ。 $M|T$ の階数写像は M の階数写像の $\text{pow}(T)$ への制限である。

(11.4.b) contraction 部分集合 $T \subset S$ に対して

$$M.T := (T, \{ X \subset T \mid X \cup B \in \mathcal{I} \text{ となる } M|(S \setminus T) \text{ の基底 } B \text{ が存在する} \},$$

は matroid となる。これを部分集合 T への contraction と呼ぶ。 $M.T$ の階数写像 ρ^T は

$$\rho^T(A) = \rho(A \cup (S \setminus T)) - \rho(S \setminus T).$$

(11.4.c) 和 $M_i = (S, \mathcal{I}_i)$ ($i = 1, 2$) に対して、

$$M_1 + M_2 := (S, \{ X_1 \cup X_2 \mid X_i \in \mathcal{I}_i \ (i = 1, 2) \})$$

は matroid となる。階数写像は

$$\rho A = \min_{B \subset A} \{ \rho_1 B + \rho_2 B + |A \setminus B| \}$$

で与えられる。

(11.4.d) 双対

$$M^* := (S, \{ X \mid X \cap B = \emptyset \text{ となる基底 } B \text{ が存在する} \})$$

は matroid となる。 $\{ S \setminus B \mid B \in \mathcal{B}_M \}$ は M^* の基底となる。したがって、 $M^{**} = M$ となる。 M^* の階数 ρ^* は次の式を満たす:

$$\rho^*(S \setminus A) = (|S| - \rho S) - (|A| - \rho A).$$

参考文献

- [1] D.J.A. Welsh. Matroid Theory. Academic Press, London 1976 (ISBN:0 12 744050 X).
- [2] W.T. Tutte. Introduction to the Theory of Matroids. American Elsevier, New York 1970.