

9. イベント空間・代数的束・Domain

順序関係で表現できるイベントの相互関係のタイプは限られている。一般的には任意の命題論理式がイベントの相互関係を表す。各イベント e に対してそれが起こったことを表す命題変数を同じ記号 e で表すとき、イベント集合 E を命題変数集合とする命題論理式は、イベントの相互関係を表現する。例えば、 $e \rightarrow f$ という論理式が正しいことは、 e が起こっていれば、 f も起こっている、ということを意味する。

例えば、イベント構造 $\mathcal{E}v = (E, \leq, A, \lambda, \#)$ は、論理式の集まり

$$\{ e \rightarrow f \mid e \leq f \} \cup \{ \neg(e \wedge f) \mid e \# f \}$$

で表現される。

イベント間の関係で、

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \rightarrow f$$

という型のものだけを扱うものがイベント空間（情報構造）である。これは、種々の文脈で登場する数学的構造となっている。次の全単射がある：

$$\text{情報構造} \iff \text{代数的 } \cap \text{ 構造} \iff \text{Domain}$$

Domain の種々の演算、イベント空間の演算を与える。

(9.1) 基本的定義 $(P, \leq)$ を順序集合とする。

(9.1.a) 部分集合 $S \subset P$ が有向 (directed) であるとは、 S の任意の 2 元 a, b に対して、 $a \leq c$ かつ $b \leq c$ を満たす元 $c \in S$ が存在することをいう。

(9.1.b) $(P, \leq)$ が CPO (Complete partial order) であるとは、最小元 $\perp$ をもち、さらに P の有向部分集合は上限を持つことをいう。 $D \subset P$ が有向であるとき、 $\bigvee D$ を $\sqcup D$ と書く。

(9.1.c) CPO $(P, \leq)$ が完備半束であるとは、空でない任意の部分集合 $S \subset P$ に対して下限 $\bigwedge S$ が存在することをいう。(これは、上に有界な部分集合が上限を持つことと同値である。また、 P に最大元を添加した順序集合が完備束であることと同値である。)

(9.1.d) CPO P の元 k が有限であるとは、任意の有向部分集合 D に対して、

$$k \leq \bigcup D \implies \exists d \in D [k \leq d]$$

が成り立つことをいう。有限な元の全体を $F(P)$ と書く。

(9.1.e) 完備半束 $(L, \leq)$ が domain(代数的半束) であるとは、 L の任意の元 a に対して

$$a = \bigcup \{ k \in F(L) \mid k \leq a \}$$

が成り立つことをいう。

(9.1.f) $(\mathcal{L}, \cap)$ が集合 X 上の交差構造であるとは、 $\mathcal{L}$ が X の部分集合族であり、交わりに関して閉じていることをいう。交差構造 $(\mathcal{L}, \cap)$ が代数的とは、 $\mathcal{L}$ の任意の有向部分集合 D に対して、 $\bigcup D \in \mathcal{L}$ となることをいう。

$\mathcal{L}$ が X 上の交差構造のとき、有限部分集合 $F \subset X$ が $\mathcal{L}$ のある元に含まれているならばその閉包 $\overline{F}$ が

$$\overline{F} := \bigcap_{F \subset C \in \mathcal{L}} C$$

により定義される。

(9.1.g) 命題. 代数的交差構造 $\mathcal{L}$ に対して、 $(\mathcal{L}, \subseteq)$ は domain となる。

(証明: $a = \bigcup \{ \overline{F} \mid F \subset a \}$ で、 $\overline{F} \in F(\mathcal{L})$ 。ただし、 $F \subset a$ は F が a の有限部分集合であることを表す。)

(9.2) イベント空間

(9.2.a) 定義. $\mathcal{A} = (A, \text{Con}, \vdash)$ が情報構造 (イベント空間) であるとは A は集合、 Con は A の有限部分集合族で、

(IS-1) $Y \in \text{Con}$ かつ $Z \subset Y$ ならば $Z \in \text{Con}$,

(IS-2) A の任意の元 a について $\{a\} \in \text{Con}$,

を満たし、さらに、 $\vdash \subset \text{Con} \times A$ は次を満たす:

(IS-3) $Y \vdash a$ ならば $Y \cup \{a\} \in \text{Con}$,

(IS-4) $Y \in \text{Con}$ ならば $Y \times Y \subset \vdash$,

(IS-5) $Y, Z \in \text{Con}$, $Y \times Z \subset \vdash$ かつ $Z \vdash a$ ならば $Y \vdash a$.

(9.3) イベント空間の定める代数的交差構造

(9.3.a) consistent subset. イベント空間 $\mathcal{A}$ に対して、 $Y \subset A$ が consistent であるとは、 Y の任意の有限部分集合が Con の元であることをいう。 Y が consistent であるとき

$$\overline{Y} := \{ a \mid F \vdash a \text{ for some } F \subset Y \}$$

も consistent となる。 $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ が成り立つ。

E が consistent であり、 $\vdash$ -closed (i.e. $E = \overline{E}$) であるとき E を $\mathcal{A}$ の状態という。状態の全体を $|\mathcal{A}|$ と書く。

(9.3.b) 定理. イベント空間 $\mathcal{A}$ に対して、 $|\mathcal{A}|$ は A 上の代数的交差構造となり、従って domain となる。

(9.4) 代数的交差構造が定めるイベント空間. 逆に A 上の代数的交差構造 $\mathcal{L}$ は、次のようにイベント空間 $\mathcal{A}(\mathcal{L}) := (A, \text{Con}_A, \vdash_A)$ を定める:

- $\text{Con}_A := \{ F \subset A \mid \exists \ell \in \mathcal{L} [F \subset \ell] \}$
- $F \vdash a \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \ell \in \mathcal{L} [F \subset \ell \implies a \in \ell]$

$\mathcal{A} \mapsto |\mathcal{A}|$ と $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{L})$ とは互いに逆である。

(9.5) domain と代数的交差構造 代数的交差構造は domain であったが、逆に domain は代数的交差構造として実現することができる。 $(L, \leq)$ が domain のとき、各 $\ell \in L$ に対して $D_\ell := \{ k \in F(L) \mid k \leq \ell \}$ とおくと部分集合族 $\mathcal{L} = \{ D_\ell \mid \ell \in L \}$ は $F(L)$ 上の代数的交差構造となり、しかも、 L と順序集合として同型である。

(9.6) 部分イベント空間の成す Domain $\mathcal{A} = (A, Con_A, \vdash_A)$ がイベント空間であるとき、 $B \subseteq A$ に対して、イベント空間 $\mathcal{B} = (B, Con_B, \vdash_B)$ が

- $Con_B := \{ Y \subset B \mid Y \in Con_A \},$
- $\vdash_B := \vdash_A \cap (Con_B \times B)$

により定義される。これを $\mathcal{A}$ の部分イベント空間とよび $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$ と書く。 $\{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A} \}$ は domain となる。

参考文献

[DP] Davey B.A. and H.A. Priestley. Introduction to Lattices and Order. Cambridge Univ Press 1990.