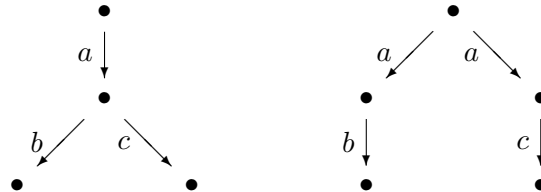


前回の訂正 定理 (6.4) は誤り。反例は、



ともに、 $\mathcal{H} = \{ab, ac\}$ となるが、これらは双模倣同値ではない。成り立つのは次である：

定理 $\mathcal{P}_i = (\mathcal{T}_i, x_i)$ ($i = 1, 2$) をプロセスとする。

- $(x_1, x_2) \in R$ となる双模倣対応 R が存在すれば

$$(*) \quad \mathcal{H}(\mathcal{T}_1, x_1) = \mathcal{H}(\mathcal{T}_2, x_2)$$

となる。

- $\mathcal{P}_i$ ($i = 1, 2$) が共に次の性質 (**) を満たすならば、 $(x_1, x_2) \in R$ となる双模倣対応 R が存在することと (*) が成り立つことは同値となる。

$$(**) \quad \forall x, a, y, y' [x \xrightarrow{a} y \wedge x \xrightarrow{a} y' \implies y = y']$$

7. ペトリネット ペトリネットは、空間的要素を導入し、遷移の作用の影響が局所的であるとすると、遷移の独立性概念が派生的に定義される：作用域の交わらない場合に複数の遷移が同時に生ずることが可能になるからである。また、遷移の間の競合も、作用域に於ける資源の取り合いとして派生的に定義される。これは遷移（イベント）の競合を定義の中に組み込むイベント構造と対照的である。

(7.1) multiset. 集合 B に対して、写像 $\mu : B \rightarrow \mathbb{N}$ を multisubset という。その全体を $\text{pow}^*(B)$ と書く。 μ を $\sum_{b \in B} \mu(b)b$ と表示することもある。

- $\mu \supset \nu \iff \forall b [\mu(b) \geq \nu(b)],$
- $\mu \cup \nu := \sum_{b \in B} \max \{ \mu(b), \nu(b) \} b,$
- $\mu \cap \nu := \sum_{b \in B} \min \{ \mu(b), \nu(b) \} b,$
- $\mu + \nu := \sum_{b \in B} (\mu(b) + \nu(b)) b,$
- $\mu - \nu := \sum_{b \in B} (\mu(b) - \nu(b)) b, \quad \text{if } \mu \supset \nu.$

(7.2) 定義. $(B, M_0, E, \text{pre}, \text{post})$ がペトリネットであるとは

- B は集合で、その元を place と呼び、 $\text{pow}^*(B)$ の元を marking と呼ぶ。ただし、

$$\text{pow}^*(B) := \text{Map}(B, \mathbb{N})$$

は、 B の重複をゆるす部分集合 (multi subset)。

- M_0 は initial marking と呼ばれる $\text{pow}^*(B)$ の元。
- $\text{pre} : E \rightarrow \text{pow}^*(B)$ は写像で precondition map と呼ばれる。
- $\text{post} : E \rightarrow \text{pow}^*(B)$ は写像で postcondition map と呼ばれる。

(7.3) グラフ表示. ペトリネット $\mathcal{PN} = (B, M_0, E, \text{pre}, \text{post})$ に対して、次のようにして辺に重みの付いた有向グラフ $\Gamma_{\mathcal{PN}}$ を定めることができる (このグラフは M_0 にはよらない。):

- 頂点集合は $B \cup E$,
- 辺は次のいずれか ($b \in B, e \in E$)
 - $b \xrightarrow{n} e$, ただし、 $\text{pre}(e)(b) = n > 0$,
 - $e \xrightarrow{n} b$, ただし、 $\text{post}(e)(b) = n > 0$.

ただし、重みが1の辺は、重みを省略する。

E -頂点は、四角で表し、その中に E の元を記入する。 B -頂点は丸で表し、一つの marking $M \in \text{pow}^*(B)$ は、各、 $b \in B$ の頂点の丸の中に $M(b)$ 個の黒丸を書いて表現する。

(7.4) ペトリネットの定めるプロセス. ペトリネット $\mathcal{PN}$ とラベル $\lambda : T \rightarrow A$ とは次のようにしてプロセス $\mathcal{P}_{\mathcal{PN}, \lambda} = ((A, X, T), M_0)$ を定める:

- $\tilde{T}$ を $(M, e, N) \in \text{pow}^*(B) \times E \times \text{pow}^*(B)$ で $M \supset \text{pre}(e)$ かつ $M - \text{pre}(e) + \text{post}(e) = N$ を満たすものの全体とおく。
- 遷移系 $(A, \text{pow}^*(B), \tilde{T})$ で M_0 から到達可能な marking の全体を X とおき、 T を $\tilde{T} \cap (X \times E \times X)$ の写像 $1_X \times \lambda \times 1_X : X \times E \times X \rightarrow X \times A \times X$ による像として定める。

(7.5) 注意. 遷移系をラベル付きペトリネットによって表現することができる; プロセス $\mathcal{P} = ((A, X, T), x_0)$ に対して、ペトリネット $\mathcal{PN}_{\mathcal{P}} = (X, x, T, \text{pre}, \text{post})$ と、ラベル $\lambda : T \rightarrow A$ が

$$\text{pre}((x, a, y)) := x, \quad \text{post}((x, a, y)) := y, \quad \lambda((x, a, y)) := a$$

により定義される。

これは token が常に唯一つの特殊なペトリネットとなる。token の数が、並列性の度合いを表していると考えられるので、遷移系のこの表示は、並列性のない表現と考えられる。特に、合成

$$\mathcal{T} \mapsto \mathcal{PN}_{\mathcal{T}} \mapsto \mathcal{T}_{\mathcal{PN}}$$

は一般には元に戻らない。

(7.6) ペトリネットの並列合成 $\mathcal{PN}_i = (B_i, M_{i0}, E_i, pre_i, post_i)$ ($i = 1, 2$) に対して、その合成 $\mathcal{PN}_1 || \mathcal{PN}_2 = (B, M_0, E, pre, post)$ が

$$B = B_1 \amalg B_2 \quad B_0 = M_{10} + M_{20} \quad E = E_1 \cup E_2$$

と

$$pre(e) := pre_1(e) + pre_2(e) \quad post(e) := post_1(e) + post_2(e)$$

により定義される。ただし、 $e \notin E_i$ のとき $pre_i(e) = post_i(e) = 0$ とおく。

E_1 と E_2 とが共通部分を持たない場合には、合成したペトリネットのグラフは単に、各ペトリネットのグラフを併置したものになる。

8. イベント構造 イベント構造は、動的な対象をイベント間の相互関係を通して記述する。これは、状態間の相互関係を通して動的対象を記述する遷移系と相補的な関係を持つ (cf[P])。

(8.1) 定義. $\mathcal{PO} = (E, \leq, A, \lambda)$ が A 上の pomset (partially ordered multiset) であるとは、

- E は集合で、その元をイベントと呼ぶ。
- $(E, \leq)$ は順序集合。 $e \leq f$ に「 e が f に先行する」という意味を与える。
- $\lambda: E \rightarrow A$ は写像で、 $\lambda(e)$ をイベント e のラベルと呼ぶ。

(8.2) pomset の定める遷移系 $\mathcal{PO} = (E, \leq, A, \lambda)$ に対して、遷移系 $\mathcal{T}_{\mathcal{PO}} = (A, \mathcal{O}, T)$ が

- $\mathcal{O} = \{ I \subset E \mid I \text{ は } (E, \leq) \text{ の ideal } \}$
- $T = \{ (I, \lambda(e), I \cup \{ e \}) \mid I, I \cup \{ e \} \in \mathcal{O} \}$

により定義される。ただし、 $I \subset E$ が ideal であるとは、

$$i \in I \wedge j \leq i \implies j \in I$$

が成り立つことをいう。 $(\mathcal{O}, \subset)$ は $\text{pow}(E)$ の部分集合で、 $\cap, \cup$ で閉じているので distributive lattice である。

(8.3) pomset の定めるペトリネット $\mathcal{PO} = (E, \leq, A, \lambda)$ に対して、ペトリネット $\mathcal{PN}_{\mathcal{PO}} = (B, M_0, E, pre, post)$ が次のように定義される：

- $B = \{ (e, f) \mid e \text{ は } f \text{ の直前の元} \} \cup \{ (e, e) \mid e \text{ は極小元または極大元} \}$,
- $M_0 := \sum_{e: \text{極小}} (e, e)$,
- $pre(e) = \{ (f, e) \mid (f, e) \in B \}$,
- $post(e) = \{ (e, f) \mid (e, f) \in B \}$,

ラベル $\lambda: E \rightarrow A$ はそのまま、 $\mathcal{PN}_{\mathcal{PO}}$ のラベルとする。

$$\mathcal{PO} \mapsto \mathcal{PN}_{\mathcal{PO}} \mapsto \mathcal{T}_{\mathcal{PN}}$$

の合成は、 $\mathcal{T}_{\mathcal{PO}}$ と一致する。

(8.4) イベント構造 pomset では分岐は見かけ上のものしかない。真の分岐を取り入れるためにイベント同志が両立しないという概念を導入する。

$\mathcal{E}v = (E, \leq, A, \lambda, \#)$ がイベント構造であるとは、

- $(E, \leq, A, \lambda)$ は pomset
- $\# \subset E \times E \setminus \Delta$ は対称な関係。 $e \# f$ のとき、イベント e, f は両立しないという。この関係は

$$e \# f \wedge f \leq f' \implies e \# f'$$

(persistence) を満たすものとする。

(8.5) イベント構造の定める遷移系 $\mathcal{E}v = (E, \leq, A, \lambda, \#)$ に対して、遷移系 $\mathcal{T}_{\mathcal{E}v} = (A, \mathcal{O}, T)$ が

- $\mathcal{O}$ は $(E, \leq)$ のイデアルで、 e, f を含めば、 $e \# f$ ではないようなものの全体、
- $T = \{ (I, \lambda(e), I \cup \{e\}) \mid I, I \cup \{e\} \in \mathcal{O} \}$

により定義される。 $\mathcal{O}$ は $\cap$ で閉じているが、 $\cup$ では閉じていないので、lattice にはならない。

参考文献

[P] Pratt, V.: Arithmetic + Logic + Geometry = Concurrency. (in URL “ftp://Boole.Stanford.edu/pub/”)