

(3.6) オートマトンの複合

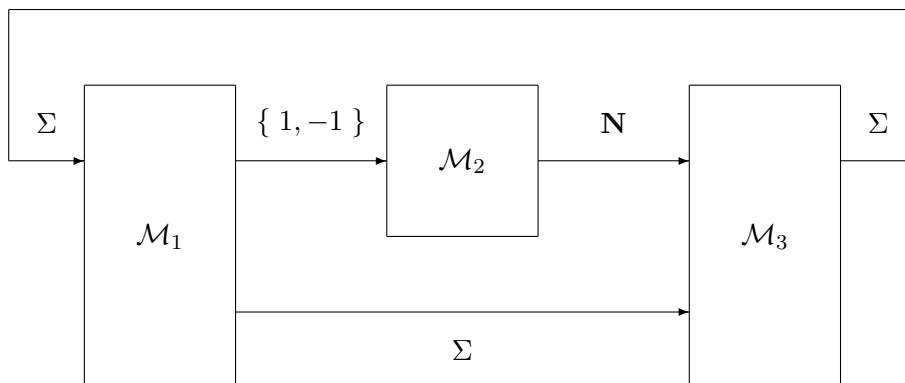
(3.6.a) 併置 $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ (3.6.b) パイプ $\mathcal{M}_1; \mathcal{M}_2$ (3.6.c) 再帰 $\mu_I \mathcal{M}$

(3.7) 例.

(3.7.a) チューリング機械

成分	X	I	O	$\tau \times \varpi$
ヘッド $\mathcal{M}_1$	Q	Σ	$\Sigma \times \{1, -1\}$	通常 of データ
位置 $\mathcal{M}_2$	$\mathbf{N}$	$\{1, -1\}$	$\mathbf{N}$	$(\alpha, n) \mapsto (\alpha + n, n)$
テープ $\mathcal{M}_3$	Σ^*	$\Sigma \times \mathbf{N}$	Σ	$(\alpha, n, \sigma) \mapsto (\sigma', \sigma(n))$

ただし、 σ' は第 n 成分が α で、他は σ と同じ。



(3.7.b) オートマタ・ネットワーク (セルオートマトン・神経回路網)

4. 時系列

(4.1) 時系列記述の前提、タイプ I : 「対象の観察」

- 観察により各時点でシステムについてのある指標を得ることができる。その指標は、ある集合 Σ に属する。
 - Σ の例としては、有限集合、実数、有限次元ユークリッド空間、関数空間、等がある。
- この指標を継続的に記録出来て、一つの系列 $\xi \in \Sigma^*$ を得る。
 - 時間は、離散的、または、連続的な場合がある。
 - 仮想的に無限回記録出来るとし、 $\xi \in \Sigma^{\mathbf{N}}$ を得ると考えることが多い。(例えば、ニューロンについてであれば、分オーダーの継続的記録は無限回の記録とみなせる。)

- この観察は繰り返すことができ、系列の集合 $L \subset \Sigma^*$ として、システムの外延的記述を得る。
 - 時不変な性質が問題となるときは、1 回の観察 ξ から、シフトによって多数の系列が得られる。

(4.2) 問題： L を内包的に記述できないか？

(4.2.a) L を生成する規則を与える：

- 微分方程式・確率過程（マルコフ過程）
- 生成文法

(4.2.b) L の満たす性質を探す。 $\xi \models \varphi \forall \xi \in L$ を満たすような命題 φ （e.g. temporal logic の命題）を探す。

(4.3) 時系列記述の前提、タイプ II：「パラメータ制御下の観察」

(4.3.a) 対象となるシステムに影響を与える信号の集まり I がある。

(4.3.b) I^* の元 η を決めて、上のように観察実験をする。これにより、

$$I^* \supset \mathcal{E}_{\text{xp}} \ni \eta \mapsto L_\eta \subset \Sigma^*$$

を得る。

$$L_{\mathcal{E}_{\text{xp}}} = \{ (\eta, \xi \mid \eta \in \mathcal{E}_{\text{xp}}, \xi \in L_\eta) \}$$

が、実験によって得られた、対象についての外延的知識となる。

(4.4) 問題：この $L_{\mathcal{E}_{\text{xp}}}$ を内包的に記述せよ。

方法の例：

- I を入力信号空間、 Σ を出力信号空間とするオートマトン $\mathcal{M}$ を構成し、それによる言語の変換が $\mathcal{E}_{\text{xp}} \mapsto L_{\mathcal{E}_{\text{xp}}}$ となるようにする。
 - しかし、 $\mathcal{M}$ は一意には定まるとは限らない。他のパラメータ設定 $\eta \notin \mathcal{E}_{\text{xp}}$ については、異なる振る舞いをするモデルが有り得る。

(4.5) 時系列記述の前提：タイプ I I I 「系の反応に応じて入力を制御」

(4.5.a) 系の出力に応じて、入力を決める規則 $\mathcal{R}$ を定めておく。（実験者はオートマトンとして振る舞う。）

(4.5.b) これにより、 $L_{\mathcal{R}} \subset \Sigma^*$ がえら得る。

(4.5.c) $\mathcal{R}$ を変えることにより、 $L_{\mathcal{R}}$ の集まり $\mathcal{L}$ を得る。

(4.6) 問題：このような外延的知識 $\mathcal{L} = \{ L_{\mathcal{R}} \mid \mathcal{R} \}$ をどのように記述すればよいか？

- (4.4 と同様に) I を入力信号空間、 Σ を出力信号空間とするオートマトンを構成し、それと $\mathcal{R}$ との合成力学系の軌道が $L_{\mathcal{R}}$ となるようにする。
- しかし、実験者の計画 $\{ \mathcal{R} \}$ をどのように記述すればよいか？

(4.7) 多成分時系列 対象となっている系が複数の部分系を持つとき、各時点で得られる指標は、組 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$ になる。従って、観察後に得られる外延的知識は

$$R \subset \Sigma_1^N \times \dots \times \Sigma_n^N$$

となる。 R の各成分への射影を $R_i \subset \Sigma_i^N$ とすると、

$$R \subset R_1 \times \dots \times R_n$$

であるが、等号が一般には成り立たない。等号が成り立たないことが、部分系が相互作用していることの、外延的記述への現れとなっている。

R の内包的記述（例えば部分系間の関数関係的關係）は、対象となっている系の内部構造の一つの表現法を与えると考えることもできる。

非同期システム

非同期的扱い 系を観察していて、顕著な振舞いを記録することによっても、時系列 $R \subset \Sigma^*$ を得る。この場合は、 Σ は観察者が関心を持っている振舞いの名前の集まりとなる。各々の振舞いに費やされる時間は一定ではないので、時間は単に振舞いの順序関係を記録する役割しか演じなくなる。（従って、 $\xi_1, \xi_2 \in R$ の n 番目の成分を比較することは意味がなくなる。）

今後、同期的記述（時間の長さに意味のある記述）が不適切な現象の記述法を考察する。各部分系での経過時間を正確に比較できない場合には、ある時刻での「全体の状態」は積極的意味を失うので、状態概念を基礎とする力学系の枠組以外の枠組が必要になる。

5. イベントとプロセスについて 状態概念に代わるものとして「イベント」と「プロセス」が原始的概念として採用されることが多いが、それらの数学的定式化は多様である。最初に、それらの背景となっていると思われる描像を明確にすることを試みよう。

(5.1) イベント概念の「公理」.

(5.1.a) 原子イベントは離散的である。（時空的にコンパクトなパターンである。）

(5.1.b) 2つの異なる原子イベントは時空的に重ならない。

- 2つの原子イベントが同時に起こっていれば、違う「場所」で起こっている。
- 2つの原子イベントが同所に起こっていれば、違う「時間」に起こっている。

(5.1.c) 2つの原子イベントを比較することができる。

- 適当な識別法により有限個の種類に分類することができる。（ただし、パラメータは無限個の値をとってもよい。）
- 分類法は恣意的である。

(5.1.d) 複数のイベントを、一つのイベントとみなせる。

(5.2) 既約プロセスの「公理」 「場所」の一つの抽象化としてプロセスを考えることができる。既約プロセスは「一点」に対応する。

(5.2.a) イベント e とプロセス P の間には、「属する」という2項関係 $e \in P$ がある。($e \notin P$ ということは、プロセス P はイベント e の生起に関与しないという積極的な内容を持つ。)

(5.2.b) 一つのイベントは複数のプロセスに属し得る。

(5.2.c) $e_1, e_2 \in P$ ならば、イベント e_1, e_2 は同時には生起できない。

(5.2.d) イベントの分類法の変更に応じてプロセスが変化する。

(5.3) プロセスの「公理」

(5.3.a) 既約プロセスはプロセスである。

(5.3.b) 2つのプロセス P, Q は並列合成 $P||Q$ できる。

- $e \in P||Q \iff e \in P \vee e \in Q,$
- $a \in P, a \notin Q, b \in Q, b \notin P$ のとき、 a, b は同時生起可能である。

(5.3.c) 各プロセス P は次元 $\dim P$ を持つ。

- $\dim P \leq k \iff P$ では、 $k+1$ 個以上のイベントが同時に生起できない。(従って、既約プロセスの次元は1以下である。)
- $\dim(P||Q) \leq \dim P + \dim Q$.