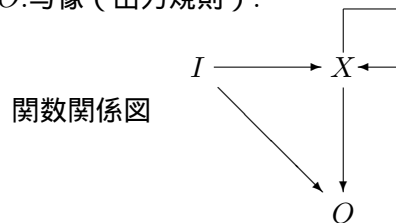


3. オートマトン

(3.1) 基礎概念.

(3.1.a) 定義 . オートマトンとは 5 つ組 (X, I, O, τ, ϖ) のことをいう、ただし

- X : 集合 (状態空間)
- I : 集合 (入力信号空間)
- O : 集合 (出力信号空間)
- $\tau : X \times I \rightarrow X$: 写像 (状態遷移規則)
- $\varpi : X \times I \rightarrow O$: 写像 (出力規則) .



(3.1.b) 言い替え :

- τ は、パラメータ付き力学系 $\{ (X, \tau_i) \mid i \in I \}$ とみなせる、ただし、 $\tau_i(x) = \tau(x, i)$.
- ϖ は、パラメータ付き関数 $\{ \varpi_x : I \rightarrow O \mid x \in X \}$ とみなせる。

(3.1.c) 記号

- $x \cdot i := \tau(x, i)$,
- $x \xrightarrow{i} x \cdot i$,
- $x(i_1 \cdots i_n) := (\cdots ((x \cdot i_1) \cdot i_2) \cdots i_{n-1}) \cdot i_n$.

(3.1.d) ラベル付き表示 : X を頂点集合とし、 $\tau(x, i) = y$, $\varpi(x, i) = o$ のとき、 $x \xrightarrow{i/o} y$ と書く。

(3.2) 例

(3.2.a) 力学系. $|I| = 1$ のときは、観測下の力学系を表す。

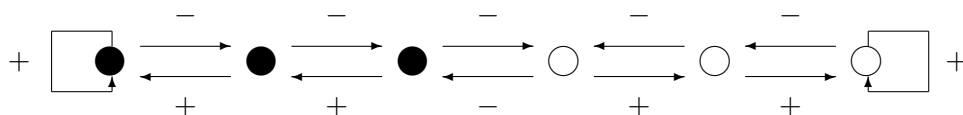
(3.2.b) 問題.

(3.2.b.i) $|X| \leq 5$ の力学系を数え上げよ。

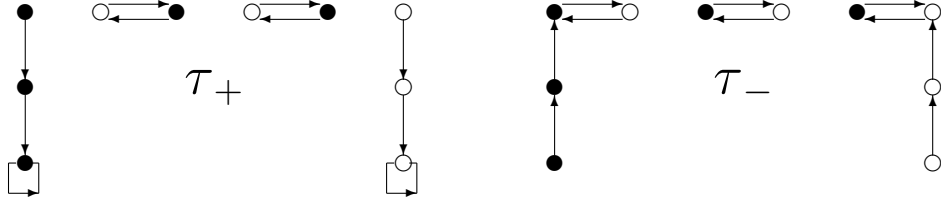
(3.2.b.ii) $|I| = 2$, $|O| = 1$, $|X| = 3$ となるオートマトンを数え上げよ。ただし、「同型」なものは同じとみなす。

(3.2.c) 学習系. $I = \{ +, - \}$, $O = \{ \alpha, \beta \}$ のとき、賞罰 ($\{ +, - \}$) を通して 2 つの選択肢 ($\{ \alpha, \beta \}$) の選び方を変える系のモデルを与える。

(3.2.c.i) 次で、白円は α を、黒円は β を出力。



(3.2.c.ii) [Tsetlin]



(3.3) オートマトン概念の意義

(3.3.a) 履歴を持つ反応系. $\mathcal{M} = (X, I, O, \tau, \varpi)$ 初期状態 $x_0 \in X$ を決めると写像 $\hat{\varpi}_{\mathcal{M}, x_0} : I^* \rightarrow O^*$ が $i_1 \cdots i_n \mapsto o_1 \cdots o_n$ により定義される、ただし

$$x_j := \tau(i_{j-1}, x_{j-1}), \quad o_j := \varpi(i_{j-1}, x_{j-1}) \quad (1 \leq j \leq n).$$

o_n は i_n だけからは一般に決まらない。

(3.3.b) 言語の recognizer. $O = \{ \top, \perp \}$ のとき、形式言語

$$L(\mathcal{M}, x_0) := \{ \sigma \in I^* \mid \varpi(x_0 \sigma) = \top \}$$

が定まる。 X が有限のとき、この言語は正則言語と呼ばれ、色々な特徴付けが出来る (Kleene の定理)。

- 正則文法で定まる言語。
- 正則式で定まる言語。
- ラベル付きの有限な有向グラフの道に対応する語の全体。

X が無限のときは、一般の帰納的に枚挙可能な言語が生成される。チューリング機械もオートマトンとして表現できるので、逆に任意の帰納的に枚挙可能な言語は、適当な無限オートマトンによって認識される。

(3.3.c) 閉じた系の構造記述. 閉じた系 (力学系) を「分割」すると、部分系はオートマトンとして記述され、全体はオートマトンの合成系として記述される。

力学系 (Z, τ) の状態空間が $Z = Z_1 \times Z_2$ と分割されるとき、

$$\tau(z_1, z_2) = (\tau_1(z_1, z_2), \tau_2(z_1, z_2))$$

と書くと、2つのオートマトンが生じる：

	X	I	O	τ	ϖ
$\mathcal{M}_1$	Z_1	Z_2	Z_1	$(z_1, z_2) \mapsto \tau_1(z_1, z_2)$	$(z_1, z_2) \mapsto z_1$
$\mathcal{M}_2$	Z_2	Z_1	Z_2	$(z_2, z_1) \mapsto \tau_2(z_1, z_2)$	$(z_2, z_1) \mapsto z_2$

(3.4) オートマトンのカテゴリー.

(3.4.a) $\psi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ がオートマトン準同型であるとは、次が可換なような写像の3組

$$\psi = (\psi_X : X_1 \rightarrow X_2, \psi_I : I_1 \rightarrow I_2, \psi_O : O_1 \rightarrow O_2)$$

をいう:

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \times I_1 & \xrightarrow{\tau_1} & X_1 \\
 \psi_X \times \psi_I \downarrow & & \downarrow \psi_X \\
 X_2 \times I_2 & \xrightarrow{\tau_2} & X_2 \\
 & & \\
 X_1 \times I_1 & \xrightarrow{\varpi_1} & O_1 \\
 \psi_X \times \psi_I \downarrow & & \downarrow \psi_O \\
 X_2 \times I_2 & \xrightarrow{\varpi_2} & O_2
 \end{array} \quad ,$$

(3.4.b) オートマトンを対象とし、オートマトン準同型を射とするカテゴリーを $\mathcal{AM}$ と書く。

(3.4.c) 自然な forgetful functor

$$\mathcal{AM} \rightarrow \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$$

が $\mathcal{M} \mapsto (I, O)$ により定義される。 $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ の部分カテゴリー

$$\{ \{ (I, O) \}, \{ \text{id}_I \times \text{id}_O \} \}$$

の引き戻しカテゴリーを $\mathcal{AM}_{I,O}$ と書く。すなわち、入力信号空間が I , 出力信号空間が O のオートマトンを対象とし、射 ψ は $\psi_I = \text{id}_I$, $\psi_O = \text{id}_O$ を満たすものとする。

(3.5) $\mathcal{AM}_I = \mathcal{AM}_{I,1}$ は、category $(\{ * \}, I^*)$ から $\mathbf{Set}$ への functor category なので、一般論よりトポスとなる。たとえば分類写像は以下ようになる。

(3.5.a) 分類対象: $\Omega_I := \{ I \subset I^* \mid p \cdot i \in I \ \forall i \in I \}$. オートマトン構造は $p \xrightarrow{i} i : p$ で与えられる、ただし $i : p = \{ \sigma \in I^* \mid i\sigma \in p \}$. $\top := I^*, \perp := \emptyset$ とおく。

(3.5.b) 命題.

- $p\sigma = \top \iff \sigma I^* \subset p$,
- $p\sigma = \perp \iff \sigma I^* \cap p = \emptyset$.

(3.5.c) 分類写像: 部分対象 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ に対して、 $\chi_{\mathcal{N}} : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_I$ が

$$\chi_{\mathcal{N}}(x) := \{ \sigma \mid x\sigma \in \mathcal{N} \} \in \Omega_I$$

により定義される。

(3.5.d) 問題. 積・和・べき対象・射対象などを記述せよ。