

(2.7) $\widehat{\mathcal{T}ree}$ に Grothendieck 位相を入れて、 $\mathcal{NDyn}$ の sheaf 化を行う。

(2.7.a) $\mathcal{T}ree$ 上の Grothendieck 位相

$$J(T) = \{ \text{sieve } S_{\{T_i\}} \mid \{T_i\} \text{ は } T \text{ の covering} \}$$

ただし、

- T の部分木の集まり、 $\{T_i \mid i \in I\}$ が covering であるとは root からの任意の無限長道 γ は、ある T_i の像と交わるもの。
- $S_{\{T_i\}}$ は像が T_i のいずれかに入る T への射の全体。 $(T$ 上の sieve となる、すなわち、射の右合成で閉じた集合となる。)

(2.7.b) **命題.** $J = \{ J(T) \mid T \in \mathcal{T}ree \}$ は Grothendieck 位相となる。すなわち

$$(2.7.b.i) \quad t_T := \{ f \mid f \text{ の codomain は } T \} \in J(T).$$

$$(2.7.b.ii) \quad h : T' \rightarrow T, S \in J(T) \text{ ならば}$$

$$h^*S := \{ g \in t_{T'} \mid h \circ g \in S \} \in J(T').$$

$$(2.7.b.iii) \quad S \in J(T), R \text{ は } T \text{ 上の sieve で、}$$

$$h^*R \in J(D(h)) \quad \forall h \in S$$

ならば、 $R \in J(T)$.

(2.7.c) **定義** ($\text{Sh}(\mathcal{T}ree, J)$ 上の sheaf) . $F \in \widehat{\mathcal{T}ree}$ が J について sheaf であるとは、任意の $S = S_{\{T_i\}} \in J(T)$ について matching family $\{x_f \mid f \in S\}$ と $x \in F(T)$ とが $x_f = x \circ f$ によって 1 対 1 に対応することをいう。ただし、 $\{x_f\}$ が matching family であるとは、

$$x_{fg} = x_f \circ g \quad D \xrightarrow{\forall f} T \in S \quad D' \xrightarrow{\forall g} D.$$

また、 $F(f)(x)$ を $x \circ f$ と書く。

(2.7.d) $\text{Sh}(\mathcal{T}ree, J) \subset \widehat{\mathcal{T}ree}$ を site $(\mathcal{T}ree, J)$ 上の sheaf 全体とする。 $\mathbf{a} : \widehat{\mathcal{T}ree} \rightarrow \text{stree}$ を sheafification 作用素とする。

(2.7.e) $\mathcal{NDyn} \rightarrow \widehat{\mathcal{T}ree} \xrightarrow{\mathbf{a}} \text{Sh}(\mathcal{T}ree, J) \subset \widehat{\mathcal{T}ree} \xrightarrow{L} \mathcal{NDyn}$ の合成を $\Gamma \mapsto \hat{\Gamma}$ と書く。

(2.7.f) **例.**

$$(2.7.f.i) \quad \hat{\mathbf{1}} = \mathbf{1}.$$

(2.7.f.ii) $\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}$ は、2つのアトムから生成される集合の宇宙となる。(ただし、 $\mathcal{T}ree$ を有限分岐の木の 카테고리とするならば、hereditary finite な普通の集合の宇宙である。)

(2.7.g) **問題.** 一般の非決定的力学系 Γ について $\hat{\Gamma}$ を記述せよ。(予想: $\mathcal{NDyn}(\mathbf{1}, \Gamma)$ -apgs Γv ($v \in \Gamma$) の bisimulation classes の生成する宇宙となる。)