

(2.6) カテゴリー $\mathcal{T}ree$ 上の presheaf としての 非決定的力学系

(2.6.a) 木のカテゴリー $\mathcal{T}ree$: 対象は木、射は simulation map。従って、 $\mathcal{T}ree$ は $\mathcal{N}D\mathbf{yn}$ の full subcategory.

(2.6.b) $\mathcal{T}ree$ 上の presheaf category: $\mathcal{T}ree^{op}$ から $\mathbf{Set}$ への functor を $\mathcal{T}ree$ 上の presheaf と呼ぶ。それを対象とし、natural transformation を射とするカテゴリーを

$$\widehat{\mathcal{T}ree} := \mathbf{Func}(\mathcal{T}ree^{op}, \mathbf{Set})$$

と書く。このカテゴリーの基本的性質は

(2.6.b.i) $\widehat{\mathcal{T}ree}$ は complete かつ cocomplete で

$$(\lim P_j)(C) = \lim(P_j(C)), \quad (\operatorname{colim} P_j)(C) = \operatorname{colim}(P_j(C)).$$

(「極限は pointwise にとれる」)

(2.6.b.ii) 米田写像と呼ばれる full embedding $\mathbf{y} : \mathcal{T}ree \rightarrow \widehat{\mathcal{T}ree}$ が

$$\mathbf{y}(T)(T') := \mathcal{T}ree(T', T)$$

により定義される。

(2.6.b.iii) トポスである。

(2.6.c) 定理. $R : \mathcal{N}D\mathbf{yn} \rightarrow \widehat{\mathcal{T}ree}$ が $R(\Gamma)(T) = \mathcal{N}D\mathbf{yn}(T, \Gamma)$ により定義されるが、

(2.6.c.i) R は left adjoint $L : \widehat{\mathcal{T}ree} \rightarrow \mathcal{N}D\mathbf{yn}$ をもつ :

$$\widehat{\mathcal{T}ree}(P, R\Gamma) \simeq \mathcal{N}D\mathbf{yn}(LP, \Gamma).$$

(2.6.c.ii) counit $\epsilon_\Gamma : L(R(\Gamma)) \rightarrow \Gamma$ は同型となる。従って $\mathcal{N}D\mathbf{yn}$ は $\widehat{\mathcal{T}ree}$ の reflective subcategory となる。

(cf: [Mac Lane & Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic], p41 Theorem 2)

(2.6.d) 構成法. $P \in \widehat{\mathcal{T}ree}$ に対して

$$L(P) = \operatorname{colim} \left(\int P \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}ree \subset \mathcal{N}D\mathbf{yn} \right),$$

ただし、 $\int P$ は

- 対象 : $(T, p) \quad (p \in P(T))$
- 射 $\psi : (T, p) \rightarrow (T', p') : P(\psi)(p') = p$ を満たす simulation map $\psi : T \rightarrow T'$

なるカテゴリー、 $\int P \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}ree$ は $(T, p) \mapsto T$ なる functor.

$\mathcal{N}D\mathbf{yn}$ は cocomplete なので (cf. (2.4)) この族の colimit が定義される。具体的には、

$$\coprod_{T \in \mathcal{T}ree, p \in P(T)} T_p \quad (T_p \text{ は } T \text{ のコピー})$$

に $t \sim \psi(t)$ ($\psi : (T, p) \rightarrow (T', p')$) の生成する bisimulation 同値関係を入れて商をとる。
この構成は次のようにも言える：

$$L(P) := \{ (p, t) \mid p \in P(T), t \in T, T \in \mathcal{T}ree \} / \simeq$$

ただし、

$$(p', \psi t) \simeq (p' \psi, t) \quad (p' \in P(T'), t \in T, \psi : T \rightarrow T').$$

(2.6.e) counit

$$\epsilon_\Gamma : LR\Gamma \rightarrow \Gamma$$

は $[(\varphi, t)] \mapsto \varphi(t)$ ($\varphi\Gamma(T) = \mathcal{N}Dyn(T, \Gamma)$) により与えられる。

(2.6.f) 系. $\mathcal{T}ree$ は $\mathcal{N}Dyn$ の中で dense, すなわち、非決定的力学系は $\mathcal{T}ree$ の colim として表される。

(2.6.g) 注意. $\eta_P : P \rightarrow RLP$ は同型とは限らない、すなわち

$$\eta_P(T) : P(T) \rightarrow \mathcal{N}Dyn(T, \text{colim}(\int P \rightarrow \mathcal{T}ree \subset \mathcal{N}Dyn)),$$

$(P(T) \ni p \mapsto [t \mapsto [(p, t)]])$ は同型とはならない。従って $R : \mathcal{N}Dyn \rightarrow \widehat{\mathcal{T}ree}$ は同型ではない。

(2.6.g.i) 問題. $\mathbf{y}(\Gamma) \in \widehat{\mathcal{T}ree}$ は tree の colim を $\lim$ に写す、すなわち、 $T \simeq \text{colim } T_j$ ならば、 $\mathcal{N}Dyn(T, T') \simeq \lim \mathcal{N}Dyn(T_j, T')$ となるか。

(2.6.g.ii) 一般の $\widehat{\mathcal{T}ree}$ の対象 $P : \mathcal{T}ree \rightarrow \text{Set}$ はこれを満たさない。(問題：この例を挙げよ。)

(2.6.g.iii) 問題：逆に colim を $\lim$ に写せば、 $\mathcal{N}Dyn$ の米田写像による像となるか？

(2.6.h) 例

(2.6.h.i) $T \rightarrow \text{Sub}(T)$ に対して、 $L(\text{Sub}) \simeq \Omega$ 。

(2.6.h.ii) 問題： $T \rightarrow \text{Sub}(T \otimes \Gamma)$ から定義される $P\Gamma$ は power object となるか？すなわち、以下のように定義される射

$$\Phi : \text{Sub}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \rightarrow \mathcal{N}Dyn(\Gamma_1, P\Gamma_2)$$

は同型か？ $\Gamma \subset \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ と $v_1 \in \Gamma_1$ に対して、

$$\kappa(v_1) \in \text{Sub}(\text{Path}(v_1) \otimes \Gamma_2)$$

を次が pull-back となるように定める。

$$\begin{array}{ccc} \kappa(v_1) & \xrightarrow{\quad} & \text{Path}(v_1) \otimes \Gamma_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma \cap (\Gamma v_1 \otimes \Gamma_2) & \xrightarrow{\quad} & \Gamma v_1 \otimes \Gamma_2 \end{array} \quad .$$

そして、

$$\Phi(\Gamma) := \overline{\kappa(v_1)}$$

と定義する。

(2.6.h.iii) 問題: $T \rightarrow \mathcal{NDyn}(\Gamma_1 \otimes T, \Gamma_2)$ から定義される $[\Gamma_1, \Gamma_2]$ はべき対象となるか? すなわち、以下のように定義される射

$$\Psi : \mathcal{NDyn}(\Gamma \otimes \Gamma_1, \Gamma_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{NDyn}(\Gamma, [\Gamma_1, \Gamma_2])$$

は同型となるか?

$F : \Gamma \otimes \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ と $v \in \Gamma$ に対して

$$\kappa_F(v) \in \mathcal{NDyn}(\text{Path}(v) \otimes \Gamma_1, \Gamma_2)$$

を次の図が可換になるように定義し、 $\Psi(F)(v) := \overline{\kappa_F(v)}$ とおく。

$$\begin{array}{ccc} \text{Path}(v) \otimes \Gamma_1 & & \\ \varpi(v) \otimes 1 \downarrow & \searrow \kappa_F(v) & \\ \Gamma \otimes \Gamma_1 & \xrightarrow{F} & \Gamma_2 \end{array}$$

($\Phi : \mathcal{NDyn}(\Gamma, [\Gamma_1, \Gamma_2]) \rightarrow \mathcal{NDyn}(\Gamma \otimes \Gamma_1, \Gamma_2)$ が存在して、 $\Phi \circ \Psi = \text{id}$ とはなるが、 $\Psi \circ \Phi = \text{id}$ とはならない。)

(2.6.h.iv) 問題. $P\Gamma \simeq [\Gamma, \Omega]$ となるか?