

(2.4) hyperset(非有基的集合) について.

(2.4.a) 集合 Λ に対して、**accecible pointed Λ -graph** (あるいは Λ -apg) とは 組 (Γ, p) で次の条件を満たすもの:

- Γ は非決定的力学系
- $p \in \Gamma^0$ は $\Gamma p = \Gamma$ を満たす。
- $\text{Leaf}_\Gamma := \{ v \in \Gamma^0 \mid \text{Child}(v) = \{ v \} \}$ は Λ の部分集合。

(2.4.b) $\Lambda\text{-apg}(\Gamma_i, p_i)$ ($i = 1, 2$) に対して、simulation map $\psi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ が

- $\psi(p_1) = p_2$,
- $\psi(\ell) = \ell \quad \forall \ell \in \text{Leaf}_\Gamma$

を満たすとき、 Λ -apg-map という。

(2.4.c) R が Λ -apg $\mathcal{A}_i = (\Gamma_i, p_i)$ ($i = 1, 2$) の間の **bisimulation(双模倣) 対応** であるとは、 R が Γ_i ($i = 1, 2$) の間の bisimulation であって、 $(p_1, p_2) \in R$ が成り立つことをいう。このとき、 $\mathcal{A}_i$ ($i = 1, 2$) は双模倣同値であるといい、 $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$ と書く。

(2.4.c.i) 命題. R が bisimulation ならば、 $\pi : R \rightarrow \Gamma_i^0$ は全射。

(2.4.c.ii) 命題. $\simeq$ は Λ -apg の全体の上の同値関係となる。

(2.4.d) Λ -apg の bisimulation 同値類のことを **Λ -hyperset** という。 $\{\top, \perp\}$ -apg $(\{\top\}, \top)$ と $(\{\perp\}, \perp)$ の同値類を各々 $\top, \perp$ と書く。

$\Lambda\text{-apg}(\Gamma, p)$ と、 $q \in \text{Child}(p)$ に対して、 $[(\Gamma q, q)] \in [(\Gamma, p)]$ と書く。これが well-defined であることが容易に示される。明らかに $\top \in \top, \perp \in \perp$ 。

(2.5) $\mathcal{N}\mathcal{D}\mathbf{yn}$ は subobject classifier を持つ

(2.5.a) subobject classifier $:(\Omega, \top)$

- $\{\top, \perp\}$ -hyperset の全体を Ω , 遷移を $a \rightarrow b \iff b \in a$ と定めると、非決定的力学系 Ω が定義される。
- $\top : \mathbf{1} \rightarrow \Omega$ を $\top(*) = \top$ により定める。

(2.5.b) **特性写像**: $\psi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma$ を monic とする。 $\Gamma_1^0 \subset \Gamma^0$ とみなしてよい。

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &:= \{ v \in \Gamma \mid v \notin \Gamma_1^0, \quad \Gamma v \cap \Gamma^0 \neq \emptyset \} \\ \Gamma_3 &:= \{ v \in \Gamma \mid v \notin \Gamma_1^0, \quad \Gamma v \cap \Gamma^0 = \emptyset \}\end{aligned}$$

とおくと、あきらかに $\Gamma^0 = \Gamma_1^0 \amalg \Gamma_2 \amalg \Gamma_3$ となる。非決定的力学系 $\bar{\Gamma}$ を

$$\bar{\Gamma}^0 = \begin{cases} \{\top, \perp\} \cup \Gamma_2 & \text{if } \Gamma_3 \neq \emptyset \\ \{\top\} \cup \Gamma_2 & \text{if } \Gamma_3 = \emptyset \end{cases}$$

$$v \rightarrow w \iff \left\{ \begin{array}{l} v, w \in \Gamma_2, \quad v \xrightarrow{\Gamma} w \\ \text{または} \quad v \in \Gamma_2, \quad w = \top, \quad \exists w' \in \Gamma_1^0 \left[v \xrightarrow{\Gamma} w' \right] \\ \text{または} \quad v \in \Gamma_2, \quad w = \perp, \quad \exists w' \in \Gamma_3 \left[v \xrightarrow{\Gamma} w' \right] \\ \text{または} \quad v = w = \top \\ \text{または} \quad v = w = \perp \end{array} \right.$$

と定める。 $\chi : \Gamma \rightarrow \Omega$ を

$$\chi(v) := \begin{cases} \top & \text{if } v \in \Gamma_1 \\ [(\bar{\Gamma}v, v)] & \text{if } v \in \Gamma_2 \\ \perp & \text{if } v \in \Gamma_3 \end{cases}$$

と定めると、 $\chi^{-1}\top = \Omega_1$ であり、次の図が pull-back となる：

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\psi} & \Gamma \\ \downarrow ! & & \downarrow \chi \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

すなわち、 χ は ψ の分類写像となる。

このような χ が唯一であることは Ω が hyperset のカテゴリーでの final object であることからわかる。