2. 非決定的力学系

(2.1) 基礎概念

(2.1.a) 定義：$\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1)$ が**非決定的力学系**であるとは、Γ が有向グラフであって、すなわち、

$$\Gamma^1 \subset \Gamma^0 \times \Gamma^0$$

であり、どの頂点からも辺が出ていることをいう。頂点を**状態**、辺を**遷移**ともいう。$(v, w) \in \Gamma^1$ のとき $v \xrightarrow{\Gamma} w$, あるいは単に、$v \to w$ と書く。また、しばしば、$v \in \Gamma$ により,v が Γ の頂点（状態）であることを表す。

$\gamma = (v_1, v_2, \cdots, v_m)$ が**道**であるとは、$v_i \xrightarrow{\Gamma} v_{i+1} \quad (i = 1, \cdots, m-1)$ が成り立つことをいう。

注意：力学系はどの頂点の出次数も丁度１である有向グラフとみなせる。

(2.1.b) 定義：$\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ が **simulation map** であるとは、

$$\forall v_1 \in \Gamma_1^0 \forall w_2 \in \Gamma_2^0 [f(v_1) \to w_2 \;\Rightarrow\; \exists v_2 \in \Gamma_1^0 [v_1 \to v_2 \wedge \phi(v_2) = w_2]],$$

すなわち

$$\phi_* \mathrm{Child}_{\Gamma_1}(v_1) = \mathrm{Child}_{\Gamma_2}(\phi(v_1)) \quad \forall v_1 \in \Gamma_1^0$$

が成り立つことをいう。ただし、

$$\mathrm{Child}_\Gamma(x) := \{\, y \mid x \xrightarrow{\Gamma} y \,\}.$$

非決定的力学系を 対象 simulation map を arrow とするカテゴリーを $\mathcal{ND}\mathbf{yn}$ と書く。

(2.1.c) 部分非決定的力学系: 包含写像 $\Gamma_1 \to \Gamma$ が simulation map であるとき、すなわち、

$$v \in \Gamma_1 \Rightarrow \mathrm{Child}(v) \subset \Gamma_1$$

が成り立つとき、Γ_1 を**部分非決定的力学系** という。部分非決定的力学系の全体を $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ と書く。

(2.2) bisimulation

(2.2.a) 非決定的力学系 Γ_i $(i = 1,\ 2)$ に対して、$R \subset \Gamma_1^0 \times \Gamma_2^0$ が **bisimulation(双模倣)** であるとは、ある simulation map $\psi_i : \Gamma \to \Gamma_i$ $(i = 1,\ 2)$ 　が存在して、

$$R = \{\, (\psi_1(v), \psi_2(v) \mid v \in \Gamma \,\}$$

となることをいう。

(2.2.b) 命題. R が bisimulation であるためにはすべての $\forall (v_1, v_2) \in R$ に対して次が成り立つことが必要かつ十分な条件である：

$$\forall w_1 \in \Gamma_1 \; [v_1 \to w_1 \quad \Longrightarrow \quad \exists w_2 \in \Gamma_2 [(w_1, w_2) \in R \;\wedge\; v_2 \to w_2]]$$

かつ

$$\forall w_2 \in \Gamma_2 \; [v_2 \to w_2 \quad \Longrightarrow \quad \exists w_1 \in \Gamma_1 [(w_1, w_2) \in R \;\wedge\; v_1 \to w_1]]\,.$$

(2.2.c) 命題. R, R' が bisimulation ならば、$R \cup R'$, ${}^tR$, $R \circ R'$ も bisimulation. 従って、R が Γ の自己 bisimulation ならば、Γ を含む最小の同値関係もまた bisimulation となる。

(2.2.d) 命題. R が非決定的力学系 Γ の同値関係かつ bisimulation ならば、商集合のうえに $[v]{\to}[w] \iff v{\to}w$ により 非決定的力学系の構造が入り、商写像が simulation map となる。

(2.3) 一状態の生成する 非決定的力学系.

(2.3.a) 定義. Γ が **tree** であるとは、それが連結なグラフであり、しかも、ある写像 boss : $\Gamma^0{\to}\Gamma^0$ のグラフの逆となっていること、すなわち、$\Gamma^1 = \{\ (\mathrm{boss}(v), v) \mid v \in \Gamma^0\ \}$ であることをいう。連結性より、 $\mathrm{boss}(*) = *$ となる頂点*がただ一つ定まる。これを tree Γ の **root** と呼ぶ。

(2.3.b) 定義. Γ の各頂点 v に対して、tree である $\mathrm{Path}_\Gamma(v)$ が定義される：その頂点は v を始点とする有限長の道、辺 $\gamma{\to}\gamma'$ は、道 γ が道 γ' の最後の部分を取り除いたものであること、すなわち、

$$\gamma = (v, v_1, \cdots, v_n), \quad \gamma' = (v, v_1, \cdots, v_n, w)$$

となっていることを意味する。$\mathrm{boss}(\gamma') = \gamma$, $\mathrm{boss}((v)) = (v)$ となっている。

(2.3.c) 命題 $\psi : \Gamma_1{\to}\Gamma_2$ が simulation map ならば各 $v \in \Gamma_1$ に対して、

$$\psi_* : \mathrm{Path}_{\Gamma_1}(v){\to}\mathrm{Path}_{\Gamma_2}(\psi(v))$$

が導かれ、全射となる。

(2.3.d) 命題. 写像 $\varpi(v) : \mathrm{Path}_\Gamma(v)^0{\to}\Gamma^0 \quad (v, v_1, \cdots, v_n) \mapsto v_n$ は simulation map となる。この像を Γv と書く。

(2.3.e) 命題.

(2.3.e.i) $\phi : \Gamma_1{\to}\Gamma_2$ が monic であための必要十分な条件は ϕ が写像として単射であることである。

(2.3.e.ii) simulation map $\psi : \Gamma_1{\to}\Gamma_2$ に対して、像 $\mathrm{Im}(\psi)$ が

$$(\{\ \psi(v) \mid v \in \Gamma_1\ \}, \{\ \psi v{\to}\psi w \mid v{\to}w\ \})$$

により定義される。

(2.4) カテゴリーとしての性質

(2.4.a) 初対象：$\mathbf{0} = (\emptyset, \emptyset)$,

(2.4.b) 終対象：$\mathbf{1} = (\{\ *\ \}, \{\ (*, *)\ \})$,

(2.4.c) テンソル積：$\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 = (\Gamma_1^0 \times \Gamma_2^0, \Gamma_1^1 \times \Gamma_2^1)$

(2.4.c.i) $(\Gamma_, \Gamma_2) \mapsto \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ は bifunctor.

(2.4.c.ii) $\mathbf{1} \otimes \Gamma \simeq \Gamma$

(2.4.c.iii) $\Gamma_2{\to}\mathbf{1}$ は $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2{\to}\Gamma_1$ を引きおこす。

(2.4.c.iv) **積は一般には存在しない。** すなわち、$\Gamma \to \Gamma_i$ $(i = 1,\ 2)$ は $\Gamma \to \Gamma_1 \times \Gamma_2$ を一般には導かない。これは、Γ が Γ_i $(i = 1,\ 2)$ の各々を simulate し得ても、Γ_i の双方を同時に simulate することは一般には出来ないこと意味する。
なお、力学系の場合には、Γ, Γ_i $(i = 1,\ 2)$ のいずれも各状態からの遷移は一意的なので、Γ は双方を同時に simulate できるのである。

(2.4.d) **テンソル積 (2):** $\psi_i : \Gamma_i \to \Gamma$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、非決定的力学系 $\Gamma_1 \otimes_\Gamma \Gamma_2$ を、状態空間を

$$\Gamma_1^0 \times_{\Gamma^0} \Gamma_2^0 := \{\ (v_1, v_2) \in \Gamma_1^0 \times \Gamma_2^0 \mid \psi_1(v_1) = \psi_2(v_2)\ \}$$

遷移を、

$$(v_1, v_2) \to (w_1, w_2) \quad \Longleftrightarrow \quad v_1 \to w_1\ \wedge\ v_2 \to w_2$$

により定めると、$\kappa_i : \Gamma_1 \otimes_\Gamma \Gamma_2 \to \Gamma_i$ $(i = 1,\ 2)$ $((v_1, v_2) \mapsto v_i)$ は simulation map となる。

注意：

(2.4.d.i) $\Gamma_1 \otimes_\Gamma \Gamma_2$ は $\Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2$ について functorial である。

(2.4.d.ii) $\Gamma_1 \otimes_\Gamma \Gamma_2$ の状態空間は $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ の部分集合であるが、包含写像は simulation map では**ない**。

(2.4.d.iii) 次は pull-back diagram には一般にはなら**ない**。

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_3 \arrow[r, "\kappa_1"] \arrow[d, "\kappa_2"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "\psi_1"] \\
\Gamma_2 \arrow[r, "\psi_2"'] & \Gamma
\end{tikzcd}$$

しかし、ψ_i のいずれかが monic であれば、pull-back となる

(2.4.d.iv) $\Gamma \otimes_\Gamma \Gamma \simeq \Gamma.$

(2.4.e) **和：** $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 = (\Gamma_1^0 \coprod \Gamma_2^0, \Gamma_1^1 \coprod \Gamma_2^1)$

(2.4.f) **coequalizer** $f_i : \Gamma \to \Gamma_1$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、coequalizer $F : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & \Gamma_1 \arrow[r, "F"] & \Gamma_2
\end{tikzcd}$$

構成法：$R := \{\ (f_1(v), f_2(v)) \mid v \in \Gamma\ \}$ を含む最小の同値関係を作ると、これが自己双模倣となる。このとき、この同値関係による商集合を状態空間とし、商写像が simulation map となるような 非決定的力学系 Γ_2 が同型を除いて唯一つ存在する。

(2.4.g) **push-out** $\psi_i : \Gamma \to \Gamma_i$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、非決定的力学系 $\Gamma_1 \oplus_\Gamma \Gamma_2$ を、次の図が coequalizer となるように定義する：

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, shift left, "\psi_1"] \arrow[r, shift right, "\psi_2"'] & \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \arrow[r] & \Gamma_1 \oplus_\Gamma \Gamma_2
\end{tikzcd}$$