

1. 力学系のカテゴリー

(1.1) 力学系の基礎概念

(1.1.a) 記号

- $T := \{ n \mid n \text{ は非負整数} \}$
- $(X \rightarrow Y) = \{ f \mid f : X \rightarrow Y \}$ (X, Y : 集合、 f : 写像)

(1.1.b) $D = (\mathcal{S}, \tau)$ が**力学系** $\iff \tau : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ は写像 ($\mathcal{S}$: 状態空間、 τ : 状態遷移写像)。
 $|D| := \mathcal{S}$ と書く。

(1.1.c) $\mathbf{x} \in (T \rightarrow \mathcal{S})$ が D の**軌道** $\iff \tau(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t+1) \forall t \in T$.
 $\mathbf{x}$ を $(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots)$ と書く。

(1.1.d) $\text{Orbit}(D) := \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ は } D \text{ の軌道} \}$
 $\omega(x) := (x, \tau(x), \tau^2(x), \dots, \tau^n(x), \dots) \in \text{Orbit}(D) \ (x \in \mathcal{S})$

(1.1.e) 力学系の有向グラフ: $\Gamma(D) := (\mathcal{S}, E := \{ (x, \tau(x)) \mid x \in \mathcal{S} \})$

(1.2) 力学系のカテゴリー

(1.2.a) 力学系のカテゴリー: $\mathbf{Dyn}$

- 対象: 力学系
- 射: 力学系の準同型 $\varphi : D_1 \rightarrow D_2 \iff |\varphi| : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2 \text{ s.t. } \tau_2 \circ |\varphi| = |\varphi| \circ \tau_1$.
- $\mathbf{Dyn}(D_1, D_2) := \{ \varphi : D_1 \rightarrow D_2 \text{ : 射} \}$
- 注意: $\mathcal{N} = (T, \bullet + 1)$ のとき、 $\mathbf{Dyn}(\mathcal{N}, D) = \text{Orbit}(D)$,
 従って、 $\varphi : D_1 \rightarrow D_2$ は $\mathbf{Dyn}(\mathcal{N}, D_1) \rightarrow \mathbf{Dyn}(\mathcal{N}, D_2)$, すなわち $\varphi_* : \text{Orbit}(D_1) \rightarrow \text{Orbit}(D_2) :$
 を引き起こす。

(1.2.b) functor $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ は functor $F : \mathbf{Dyn} \rightarrow \mathbf{Dyn}$ を引き起こす。例:

- $\mathbf{pow}(D) : \{ x, y, \dots \} \mapsto \{ \tau x, \tau y, \dots \}$.
- $\text{Map}(I, D) \ (\tau(\varphi)(i) := \tau(\varphi(i)))$
- $\text{Map}(D, I) \ (\tau(\varphi)(x) := \varphi(\tau(x)))$

練習問題 $\mathbf{pow} D, \text{Map}(D, \{0, 1\})$ とを比較せよ。

(1.3) $\mathcal{D}\mathbf{yn}$ は CCC である

(1.3.a) 初対象: $(\emptyset, \emptyset)$,

(1.3.b) 終対象: $\mathbf{1} := (\{*\}, \text{id})$,
 $\mathcal{D}\mathbf{yn}(\mathbf{1}, D) = \{ D \text{ の固定点} \}$

(1.3.c) 積: $D_1 \times D_2 := (\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2, \tau_1 \times \tau_2)$
 $\mathcal{N} \times D$ は D の suspension

(1.3.d) 和: $D_1 + D_2 := (\mathcal{S}_1 \amalg \mathcal{S}_2, \tau_1 \amalg \tau_2)$,
 D が、initial ではない 2 つの力学系の和と同型であるとき、可約 (reducible) であるという。可約でない力学系を既約 (irreducible) であるという。

(1.3.e) 射対象: $[D_1, D_2] := (\mathcal{D}\mathbf{yn}(\mathcal{N} \times D_1, D_2), \tilde{\tau})$ $\tilde{\tau}(\varphi)(m, x) = \varphi(m+1, x)$
 $[D_1, D_2]$ の固定点と D_1 から D_2 への射とが 1 対 1 に対応する。

(1.3.f) 随伴 (adjunction) $\bullet \times D \dashv [D, \bullet]$
 $\psi: D_1 \times D_2 \rightarrow D_3$ に対して、 $\tilde{\psi}: D_1 \rightarrow [D_2, D_3]$ を $\tilde{\psi}(x_1)(m, x_2) := \psi(\tau_1^m x_1, x_2)$ と定めると、同型: $\mathcal{D}\mathbf{yn}(D_1 \times D_2, D_3) \simeq \mathcal{D}\mathbf{yn}(D_1, [D_2, D_3])$ を得る。

(1.4) $\mathcal{D}\mathbf{yn}$ は topos である

(1.4.a) 分類対象 Ω

i. $\Omega = (\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq 0\} \cup \{-\infty\}, \tau_\Omega)$ ($\tau_\Omega: 0 \mapsto 0, \quad n \mapsto n+1, \quad -\infty \mapsto -\infty$)

ii. $\top: \mathbf{1} \rightarrow \Omega$ ($\top(*) := 0$).

iii. monic $\varphi: D_1 \rightarrow D$ (i.e. $\varphi(\mathcal{S}_1) \subset \mathcal{S}$ は不変部分集合) の特性射:

$\chi_\varphi: D \rightarrow \Omega, \chi_\varphi(x) := -\min\{t \in T \mid \tau^t x \in \varphi(\mathcal{S}_1)\}$ ($\min \emptyset := \infty$)

注意 Ω の状態集合は無限集合であることから、有限力学系のカテゴリーはトポスをなさないことがわかる。実は CCC でもないことがわかる (練習問題)。

iv. 練習問題 Ω の部分対象をすべて求めよ。すなわち、 $\mathcal{D}\mathbf{yn}(\Omega, \Omega)$ をすべて求めよ。

(1.4.b) 分類対象の構造

i. $|\Omega|$ 上の順序 $\preceq: \mathbf{Z}$ 上では普通の大関係、 $-\infty$ は最小元とする。

ii. $\mathcal{D}\mathbf{yn}(\mathbf{1}, \Omega) = \{\top, \perp\}$, ただし、 $\perp(*) = -\infty$.

iii. mono $< \top, \top >: \mathbf{1} \rightarrow \Omega \times \Omega$ の特性写像 $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$

$(\alpha, \beta) \mapsto \min(\alpha, \beta)$

iv. mono $\leq_1: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ を $\wedge, pr_1: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ の equalizer とすると、

$$\leq_1 := \{ \alpha, \beta \mid \alpha \preceq \beta \}$$

v. $\leq_1$ の特性写像 $\rightarrow: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$:

$$\alpha \rightarrow \beta = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \preceq \beta \\ \beta & \text{if } \alpha \succ \beta \end{cases}$$

vi. $\neg: \Omega \rightarrow \Omega$: $\neg\alpha := \alpha \rightarrow -\infty$ すなわち、

$$\neg\alpha = \begin{cases} -\infty & \text{if } \alpha \neq -\infty \\ 0 & \text{if } \alpha = -\infty \end{cases}$$

これより

$$\neg\neg\alpha = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \neq -\infty \\ -\infty & \text{if } \alpha = -\infty. \end{cases}$$

(1.4.c) べき対象: $PD = (\text{Sub}(\mathcal{N} \times D), \tilde{\tau})$ ただし、

$$\tilde{\tau}E := \{ (n, d) \mid (n+1, d) \in E \}.$$

$\text{Sub}(A \times D) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Dyn}(A, PD)$ は、次のように与えられる。各 $R \subset A \times D$ と $a \in A$ に対して、 $\kappa_R(a) \in \text{Sub}(\mathcal{N} \times D)$ を、次の図が pull-back となるように定める。

$$\begin{array}{ccc} \kappa_R(a) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{N} \times D \\ \downarrow & & \downarrow \\ R \cap (\omega(a) \times D) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \omega(a) \times D. \end{array}$$

すると、 $a \rightarrow b$ ならば $\kappa_R(a) \rightarrow \kappa_R(b)$ がしめせるので、 $\kappa_R : A \rightarrow PD$ が射であることがわかる。

(1.5) 力学系の命題論理

	古典論理	力学系の論理
真理値対象	$\{0, -\infty\}$	$\Omega = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \leq 0\} \cup \{-\infty\}$
真		0
偽		$-\infty$
命題	$\varphi : X \rightarrow \{0, -\infty\}$ 部分集合 $ \varphi := \varphi^{-1}(0)$	$\varphi : D \rightarrow \Omega$ 部分力学系 $ \varphi := \varphi^{-1}(0)$
解釈		$x \models \varphi \stackrel{def}{\iff} \varphi(x) = 0$
否定	$ \neg\varphi = \varphi ^c$ $x \models \neg\varphi \iff x \not\models \varphi$	$ \neg\varphi = \{x \mid \omega(x) \cap \varphi = \emptyset\}$ $x \models \neg\varphi \iff \forall n \tau^n(x) \not\models \varphi$
2重否定	$ \neg\neg\varphi = \varphi $	$ \neg\neg\varphi = \{x \mid \omega(x) \cap \varphi \neq \emptyset\}$ ($ \varphi $ の basin) $x \models \neg\neg\varphi \iff \exists n \tau^n x \models \varphi$
排中律	$X = \varphi \cup \neg\varphi $	$D \supseteq \varphi \cup \neg\varphi $ しかし $D = \neg\neg\varphi \cup \neg\varphi $ すなわち $D = \text{Basin}(\varphi) \amalg \text{Basin}(\varphi)^c$
論理積		$\min\{\alpha, \beta\}$
論理和		$\max\{\alpha, \beta\}$
含意	$ \varphi \Rightarrow \psi = \varphi ^c \cup \psi $	$ \varphi \Rightarrow \psi = \{x \mid \omega(x) \cap \varphi \subset \psi \}$ $x \models \varphi \Rightarrow \psi \iff \forall n \in T [\tau^n x \models \varphi \rightarrow \tau^n x \models \psi]$

(1.6) レポート問題 距離空間と連続変換の成すカテゴリーの構造を調べよ。