

---

1995 年度後期 応用数学 1  
動的システムとしての複雑系記述 資料 Ver 1.5

---

- [1] 本講義のねらい：複雑系は単一の数学的形式化を拒むが、多様な数学的形式による表現は複雑系の理解を進めることが期待される。従って、複雑系の数学的基礎研究の最初の課題の一つは、複雑系のさまざまな側面を記述する数学的枠組を模索・開発・整備することにある。

この講義では、動的システムとしての複雑系の数学的諸記述法を主題として取り上げる。従来の力学系的記述系の基礎概念をカテゴリー理論の枠組みから整理するとともに、力学系的な枠組よりも抽象度の高い枠組みとして提唱されているものをいくつか概観し、複雑系の非同期的な側面の数学的記述法の一つの枠組みとしてハイパーカテゴリーの概要を述べる。

- [2] 予備知識：初等的集合論（数学概論程度）・カテゴリーの基礎事項。これ以外で必要な知識は丁寧に説明したい。

- [3] テーマ（予定）

(a) カテゴリー理論からの準備

(b) 既約プロセス

- 力学系のカテゴリー
- 非決定的力学系のカテゴリー
- 決定的オートマトンのカテゴリー

(c) 多成分同期システム

- オートマトンの複合系（チューリング機械）
- セルオートマトン・神経回路網
- deductive hyperdigraph（多成分システムの相関記述法）

(d) 非同期システム

- 遷移系・プロセス
- Petri net
- Chemical abstract machine

(e) 相互作用記述

- Action structure & action calculus

- $\pi$  算法の Action structure による実現
- ハイパーカテゴリー

[4] オンライン情報:URL:"<http://math.hokudai.ac.jp/~tujisita/fcs-home.html>"

## 0. カテゴリーの基礎概念

(0.1) カテゴリー  $\mathcal{C}$ 

- 対象 (object),  $\mathcal{C}_0$ :object の全体
- 射 (arrow)  $a \xrightarrow{f} b$ ,  $a = d_0(f)$ ,  $b = d_1(f)$   
 $\mathcal{C}(a, b) := \{ f \mid a \xrightarrow{f} b \}$   
 $\mathcal{C}_1 := \coprod_{a,b} \mathcal{C}(a, b)$

(0.2) dual category  $\mathcal{C}^{op}$  の対象は、 $\mathcal{C}$  の対象であり、 $\mathcal{C}^{op}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$ .  
 $\mathcal{C}$  の射  $X \xrightarrow{f} Y$  を  $\mathcal{C}^{op}$  の射とみたものを  $\overline{f}$  と書くとき、 $\overline{f} \circ \overline{g} := \overline{g \circ f}$ .

## (0.3) functor, natural transformation

- 対  $F_i : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{D}_i (i = 0, 1)$  が 次の条件を満たすとき、 $F = (F_0, F_1)$  を  $\mathcal{C}$  から  $\mathcal{D}$  への functor であるという。 $F_i x$  はしばしば  $Fx$  と略記する。
  - $d_i F_1(f) = F_0(d_i f) \quad (i = 0, 1)$  すなわち  $X \xrightarrow{f} Y$  ならば  $F_0(X) \xrightarrow{F_1(f)} F_0(Y)$ ,
  - $F(1_X) = 1_{F(X)}$ ,
  - $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$  すなわち

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ f \downarrow & \searrow g & \\ Y & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

が可換ならば、

$$\begin{array}{ccc} F(X) & & \\ F(f) \downarrow & \searrow F(g) & \\ F(Y) & \xrightarrow{F(h)} & F(Z) \end{array}$$

も可換である。

- functors  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  に対して族  $\alpha = \{ Fx \xrightarrow{\alpha(X)} Gx \mid x \in \mathcal{C}_0 \}$  が natural transformation  $F \rightarrow G$  であるとは、任意の arrow  $X \xrightarrow{f} Y$  に対して  $\alpha(Y) \circ F(f) = G(f) \circ \alpha(X)$  を満たすこと、すなわち次の図が可換であることをいう。

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\
 \alpha(X) \downarrow & & \downarrow \alpha(Y) \\
 G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y)
 \end{array} \quad .$$

(0.4) 同型 (isomorphism): 射  $X \xrightarrow{f} Y$  が同型であるとは、次の条件を満たす射  $Y \xrightarrow{g} X$  が存在することをいう:  $f \circ g = 1_Y$ ,  $g \circ f = 1_X$ .

(0.5) 単射 (monic):  $X \xrightarrow{f} Y$  が monic であるとは、任意の2つの射  $g, h: A \rightarrow X$  について、 $f \circ g = f \circ h$  ならば  $g = h$  となることをいう。 $X$  を codomain とする2つの monic  $A_i \xrightarrow{f_i} X$  ( $i = 1, 2$ ) に対して、次の図が可換となる同型  $g: A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$  が存在するとき、 $f_1$  と  $f_2$  とは同値であるという:

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 & & \\
 \downarrow g & \searrow f_1 & \\
 & X & \\
 \uparrow g & \swarrow f_2 & \\
 A_2 & &
 \end{array} \quad .$$

$X$  を codomain とする monic の同値類を  $X$  の subobject といい、その全体を  $\text{Sub}(X)$  と書く。

カテゴリー  $\mathcal{C}$  が pull-back を持つときは、 $X \mapsto \text{Sub}(X)$  は functor  $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$  になる:  $X \xrightarrow{f} Y$  と mono  $B \xrightarrow{\iota} Y$  に対して、次の pull-back における  $\kappa$  は mono となるから、 $\text{Sub}(f): \text{Sub}(Y) \rightarrow \text{Sub}(X)$  を  $\text{Sub}(f)([\iota]) := [\kappa]$  により定義できる:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xleftarrow{\kappa} & X \\
 \downarrow & & \downarrow f \\
 B & \xleftarrow{\iota} & Y
 \end{array}$$

(0.6) 全射 (epics): monics の dual な概念。

(0.7) 積 (product)  $X \times Y$  ・ 余積 (coproduct)  $X + Y$

(0.8) 始対象 (initial object)  $0$

(0.9) 終対象 (final object)  $1$ : どの対象  $X$  に対しても、只一つの射  $X \rightarrow 1$  がある。この射を  $!_x$  または、単に  $!$  と書く。

(0.10) べき対象 (exponential) : 積を持つカテゴリー  $\mathcal{C}$  において、

$$\theta_{X,Y} : \mathcal{C}(\bullet \times X, Y) \simeq \mathcal{C}(\bullet, [X, Y])$$

となる全単射があり、 $X, Y$  について自然であるとき、 $[X, Y]$  をべき対象という。 $Y^X$  と書くことも多い。 $\bullet = [X, Y]$  の場合に、 $\text{id}_{[X, Y]}$  に対応するものを  $ev : [X, Y] \times X \rightarrow Y$  と書く。 $F : Z \times X \rightarrow Y \xrightarrow{\theta} f : Z \rightarrow [X, Y]$  のとき  $F = ev \circ (f \times 1_X)$  となる。

(0.11) 終対象・積・べき対象を持つカテゴリーを cartesian closed category (CCC と略す)

(0.12) subobject classifier:  $(\Omega, \top : 1 \rightarrow \Omega)$  任意の monic  $f : A \rightarrow X$  に対して、次の図が pull-back となるような射  $\chi_f : X \rightarrow \Omega$  が唯一つ存在する：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow ! & & \downarrow \chi_f \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

(0.13) topos の定義の仕方はいろいろある。次のものが、具体的なカテゴリーが topos であることを確かめるのに便利である：カテゴリー  $\mathcal{C}$  が elementary topos (以下単に topos) であるとは

- (a) 終対象と積を持つ。
- (b) subobject classifier を持つ。
- (c) 各対象  $X$  はべき対象  $PX$  を持つ。すなわち、対象  $PX$  と射

$$X \times PX \xrightarrow{\epsilon_X} \Omega$$

が存在して、 $F : A \rightarrow PX$  に対して、 $\chi_F : X \times A \rightarrow \Omega$  を、

$$[X \times A \times X \times PX \times \Omega; 1 \times F \times \chi_F \times \epsilon_X]$$

が可換になるように定義するとき、 $F \mapsto \chi_F$  は全単射

$$\mathcal{C}(X \times A, \Omega) \simeq \mathcal{C}(A, PX)$$

を与える。

(0.14) topos の基本的性質

- (a) topos は CCC である。
- (b) topos は finite complete, とくに、pull-back, equalizer が存在する

- (c) topos では monic かつ epic であれば同型となる。
- (d) topos は finite cocomplete, とくに、始対象・和・coequalizer・push out などを持つ。
- (e) topos では、集合論的な議論が正当化される。この主張に正確な意味を与えるには internal language と呼ばれる形式系を導入する必要がある。[B] ではこのことをまず示した後、topos の多くの性質を、集合論の場合の議論を形式化することにより、簡潔に導いている。

(0.15) 参考書

- [M ] C. McLarty: Elementary Categories, Elementary Toposes. Oxford Logic Guides **21**, Clarendon Press, Oxford 1995.
- [B ] J.L. Bell: Toposes and Local Set Theories. Oxford Logic Guides **14**, Clarendon Press, Oxford 1988.
- [LS ] F.W.Lawvere and S.H.Schanuel: Conceptual Mathematics—A first introduction to categories, Buffalo Workshop Press 1993, ISBN 0-9631805-1-7. (カテゴリーの入門書であるが、力学系のカテゴリーの解説にかなりのページを割いており、最後の章ではトポスの概念が導入されている。Lawvere はトポス (elementary topos) の概念の創始者であるとともにカテゴリー理論の発展の道筋を作り続けている人)