9　第 9 回：知識のパラドックス

きょうの予定

- 嘘付きの逆理 (続き)
- タルスキの真理定理
- 「共通知識」

9.1　嘘つきの逆理：自己言及の様相

前回の資料に

$True(P)$**:** 文 P が正しいと主張することは P と主張することと同じである。

という文があった。これも「嘘つきの逆理」と同様の様相に持ち込める[1]。この文は「すべての文 P」についての言明なので、当然、この文自身についてもそれを主張している。

これを対角化すると

T**:** 文 T が正しいということの意味は T だということである .

これは「この文が正しいことの意味はこの文だということである」となる。したがって、この主張は同義反復 (トートロジー) となり、主張として空虚なものとなる。

これと同様に、嘘つきの逆理の様相に帰着されるように見える文の例として次のようなものがある。

SR1 クレタ人が言った「クレタ人の言うことは正しくない」。

SR2 ２２文字以下で真理を言い表すことはできない。

SR3 私の言うことを聞いてはいけない。

SR4 一般的な主張は正しくない。

SR5 どの法則にも例外がある。

これらは、いずれも

A 文・発言についての判断である。

B それ自身が文や発言になっている。

C 判断が言及している文や発言に、それ自身が妥当する。

[1] Nih 君の指摘

ということによって、機械的に自己適用すると自己否定文となってしまう。

これはしばしば自己言及的・自己参照的様相と呼ばれる。[SR3–5] のような主張は普通に機能しているが、これは暗黙裡にその主張自身は例外としていることを意味する。しかし SR3 的態度を親が使うと子供に精神病を引き起こすという説 (ベイトソン) もある。

自己言及の様相は、理論や認識に関連する理論や認識にはつきまとう。

SR6 人間の判断は大脳の生理的活動に過ぎない。(したがってこの判断も大脳の生理的活動に過ぎない。同様に、大脳の生理的活動により「人間の判断は大脳とは独立の魂から生じる」という判断も生じる。したがって、判断の正誤はナンセンスである。等々)

SR7 科学は社会的な構成物である。それが人間に独立な世界の有り様を示すものではない。(したがって社会構成論自身も社会が構成したものであり、科学の有り様を示すものではない。等々)

9.2　共通知識

9.2.1　知識論理

知識についての数学的分析にしばしば使われるが、様相論理である。

ある主張に、「 ~ に違いない」「 ~ の可能性がある」「 ~ を知っている」などの修飾を加えて新しい主張を作ることができるが、この変換の持つ一般的性質を分析するのが様相論理である。

様相論理では、事実 P を太郎が知っていることを $K_{taro}P$ という記号が示すようなとらえ方をする。たとえば $\boxed{K_{taro}(1+1=2)}$ により、太郎が $1+1=2$ ということを知っていることを表現する。

「言明 P が 3 名 X, Y, Z の共通知識である」ことを CP と書くとき、これは

$$CP \;=\; P \;\wedge\; K_X\, CP \;\wedge\; K_Y\, CP \;\wedge\; K_Z\, CP$$

を満たすと考えてよいだろう。この式の両辺に CP が現れるので、これは CP についての「方程式」と見ることができる。

9.2.2　クリプキ構造

様相論理の数学的意味論はクリプキによって与えられた。その構造はクリプキ構造と呼ばれている。知識論理の場合のクリプキ構造の使い方を、Muddy Children's Puzzle によって考えてみる。

9.3　宿題 (「無限」の逆裡)

円周率の１０進法小数展開の計算の記録は次々と更新されている。ところで、その展開に 0 が１万個並ぶことはありそうにもないように感ずるが、そもそも、「円周率の無限小数展開に 0 が１万個並ぶことはない」という文にどういう意味があるのか、を考えてみよう。