4　第４回：ゼノンの逆理（２）レポ– トの紹介

きょうの予定　レポ– トには講義では議論していない、重要な論点がみられる。そのいくつかを取り上げてみたい。

- 砂山の逆理の続き
- レポ– トの紹介（命題の例は後日紹介する）
- 「実際」と「理論」
- 方法的懐疑について

4.1　レポ– トの紹介

文を多少変えている場合がある。

1 (Mom) なぜアキレスの逆理がパルメニデスの思想を擁護したことになるのか。
「調べてみるとパルメニデスは事物を不変不動の「実在」とそれ以外の「非実在」とに区別する事から思慮を開始し、それまでになかった真理の演繹法（これは非常に曖昧な言い方だが）をおこなった人だった。こうした思想が原子論のデモクリトスやストア学派、つまりゼノン達に伝わったらしいのだが、肝心の、どういう点でアキレスの逆理がパルメニデスの思想の後押しになるのかについてはわからなかった。... 思い付いた理由

- 「パルメニデスが行った不変不動の物のみを「実在」とし、多様性や変化・成長・生死という性質を持つ現実のあらゆる物を「非実在」とした思考の革命にゼノンがある種の共感を示したものである？」
- 「３次元の現実では、変化や多様性が存在するが、１次元として考えた時、全ては無限であるという事を逆理で示したのは、原子論に近い思考の展開を行っていたと言われるパルメニデスへの賛意なのか？」

2 (Tak) 観察者の体感時間は、徐々に遅くなっている。.. これは、ブラックホ– ルへ落下しつつある物体をブラックホ– ルの外の観察者が傍観する時の視点に他ならない。.. ゼノンの議論に意味があるとは思えない。

3 (Sak) 古代では意味があったかもしれないが、現代で議論する意義などない。
「役に立たなければ哲学も知識もゴミ同然、というプラグマティズム的な立場をとる私にとって、この逆理そのものはやはり無意味な詭弁だ。実際にはアキレスは亀を追い越す。それで十分だ。その説明に苦心するより他になすべきことがある。
こんなことを太真面目に主張するゼノン、そしてその話に耳を傾けて考えた人々は相当の暇人だったのだろう。実際古代ギリシア人は労働をすべて奴隷に任せていたから、暇であることには間違いない。彼らは知的好奇心を自らの原動力とする純粋な学徒で

あり、学問を実生活に役立てようなどという「不純な」考えはあまり持たなかったのだろう。
このようなゼノンと私のコンテキストの違いを考えると、ゼノンを詭弁屋として一刀両断してしまうのはいささか理不尽かもしれない。
しかし、古代ギリシアならいざ知らず、みな忙しいはずの近代・現代においてもこの詭弁的問題が堂々と議論され、それについて原稿用紙 1 ~ 2 枚文のレポ− トを書かなければならないと思うと腹立たしい。ここはひとつ、この詭弁が数学・論理学の発展に大いに寄与したと考えて、実用第一主義の自分の溜飲を下げようと思うのである。」

4 (A-Sat) 速度を無視している点でゼノンの議論の間違っている。

5 (In) アキレスが亀を追い越すのは自明の理である。しかし「当たり前」で済ますのは間違いである。... 我々は、もう一度無知に戻り、いや、無知を認識し、あたりまえではない「あたりまえ」を考え直すべきである。

6 (Sor) 亀は静止しているとしても問題は同じなので、ゼノンの議論は間違っている。.. この議論は、ロジックの落とし穴を例示している。 ..
物事を定義するための定義が必要で、証明するための証明が必要になる。

7 (Yos) 疑問に思うこと

- 点を無数にとれるということは数学的な考えであって、現実には無理がある
- 時間を限りなく 0 に近づけたときに対する距離が現実的に表現できない
- ゼノンと亀が一定時間に進む距離をゼノンは無視している。

中学数学で考えれば何とも簡単なことかもしれないが、所詮、それは古代の数学者の発見であって自分の発見ではない。

8 (Ma)「これが詭弁であるなら事実はどうなのだと言って周囲の意見をつっぱねる」弁論術が　おもしろい。

9 (Miyz)「アキレスと亀の距離は $n\to\infty$ のときに 0 に収束するので追い付く。」「アキレスが亀に追い付かないことを前提として展開されている。」「この議論では、定義がないことが最大の問題である。 .. これには定義がないため数式を使っては解けず、言葉では概念しか説明できないため、結果的にはどうやっても解けないだろう。」

10 (Sas) この議論は、亀が P_3 から P_4 まで進む間にアキレスは P_2 から P_5 まで進んでしまうといった、両者の速度的概念を無視したものである .!「アキレスと亀」は誤った理論の基に構築された命題である。
個人的にはこのような一見正しいと思われる逆理を理解するという行為に対しては大変興味深いものがあると思っている。

11 (Nib) この逆理を唱える人に対して理論的に、明確に間違っていることは証明できないと思う。このような問題は抽象的で高校までの数学ではなかった新しい種類の問題である。

12 (Mit) ゼノンの逆理は亀が移動してなくても成立する。

ゼノンの逆理でおかしなところがあるとしたら、『アキレスは亀に追い付けなくなってしまう』と、不可能性を問題にしている所だと思う。
この逆理に触れて感じたことは、現実に則さない事でも、おかしな理屈を持つと人を困らせるということだ。しかも自分はそのおかしな理屈を完全に否定し得る言葉を持っていないということだ。

13 (Ok) ゼノンはアキレスが亀に追い付くまでレ− スを続けさせない。
私達は「アキレスが亀に追いつく直前までのスロ− モ− ションビデオ (もちろんここでの『スロ− 』とは一定の速さではなく、限りなく静止画像になっていくものである。) をゼノンによって見せられていたにすぎない。
それでもなお、ゼノンが「じゃあ君はアキレスが亀に追い付くまでに起きたことを明確に解説できるのか」というのならば、「君が $n < 1$ を満たす最大の数 n を教えてくれれば解説しよう。」と言ってやればよい。

14 (Ish) こういった一見馬鹿げた定理をとことん考えるのは、複雑なパズルを解くようでおもしろい。

15 (Kom) n が大きくなればなるほど P_n-P_{n+1} 間の距離は短くなる。

16 (Suz) 追い付くまでの現象を明確に解説しろというのは無意味だ。アキレスは追い抜けるのに幾何学的直線において珍妙な事を言うのはおかしなことだ。」
この逆理はパズルとしておもしろいが学問的に考えるのは百害あって一利なしである。.. この問題から今後、有意義な結果が得られるかどうか疑問だ。哲学者はこの無意味な問題を早く頭から捨てて、他の重要な問題に取り組むべきだ。

17 (Och) 時間の概念がぬけている (しっかり確立されていない) のではないか。

- 赤道上の一点をアキレスと考え、定点を亀と考えれば、地球が一周するときに、アキレスは亀に追い付いたことになる。
- アキレスが亀に近づくときに、基本単位となる時間が短くなっていく。

18 (Ay) この逆理は時間の継続が延々続くであろうことを無視したまったく意味のないものであると最初考えた。... しかし、時間の永遠の継続という観念自体その証拠を持たぬ .. と思うようになってきた。.. 全ての事象は自分の目の前で起こって完了したという事実がない限り、完全に証明するのは不可能であることに気付いた。... 私はこの逆理は今の世の中に存在する全てのものを否定する力があるように最近は思っている。

19 (Ten) 条件が不完全なため、ゼノンの主張は正しくもあり、偽でもありうる。逆理の対偶は

> 「アキレスは亀に追い付くことができる」ならば「スタ− ト地点で、亀はアキレスの後方にいる」

となる。これは、どこで「競争」するかによって (円周上では) 真でもあり (1 直線上では) 偽でもある。

20 (Kat) このパラドックスではアキレスは亀においつく点に到着できないので追い付けない。

21 (Kik)「どんなに 2 mの地点に近づいても 2 mの地点までには無限個の点がある」は偽である。以下にその理由を示す。

(a) もし、距離という空間が無限に分割できるとすれば、その空間の諸部分は有限な大きさを持つか持たないかのいずれかである。

(b) もし、無限に分割できる空間の諸部分が有限な大きさを持つ (この大きさを $a > 0$ とする) とすると、空間の大きさは $a \times \infty = \infty$ となり、有限の大きさを持つ部分が空間の中に存在しないことになってしまう。

(c) もし、無限に分割できる空間の諸部分が有限な大きさを持たない $a = 0$ とすると、空間の大きさは $0 \times \infty = 0$ となり、ゼロでない大きさを持つ空間が存在しないことになってしまう。

(a) ~ (c) より、有限な大きさの空間が存在する限り、空間を無限に分割できるということはありえない。　　証終

22 (Miyk)

(a) 各点を全て表示できない以上、「通り抜けた点の数」を考慮することに意味はない。考えるべきは「各点間の距離」である。P_n から P_{n+1} までにかかる時間を t_n, その間の距離を p_n, アキレスと亀の相対速度を v_n とすると、

$$t_n \times v_n = p_n.$$

ここで $n \to \infty$ とすると、$t_n \to 0$ となる。v_n は一定としてよいので $p_n \to 0$. 従って、アキレスは亀に追い付けないとは証明できないことが証明できた。

(b) 「「ではあなたは証明できるのか」はまず論理的に無意味な質問である。なぜならば、今僕が証明したのは、『「アキレスは亀に追い付けない」という命題は証明できない』ことを証明した迄であるが、ゼノンの逆理を覆すにはこの証明だけで十分であり、「追い付ける」とわざわざ証明する必要はまったくないからである。無論、このままでは、「できるわけでもない」「できないわけでもない」ひとどく中ぶらりんな状態であるが。一応の目的はゼノンの逆理を覆すことであり、それは達成できたわけであるから、これでいいのである。その筈なのである。しかしひどくすっきりしないのである。僕は改めて逆理の嫌らしさを身にしみたのであった。」

23 (M-Sat)「アキレスが亀に追い付くか追い付かないか、答えも証明も絶対的なものがない。もし、これが数学ならば、そんな数学は無意味であるといえる。しかし、私にはこの問が数学なのかどうかも分類できていない。ハッキリした明白なものを難解な言葉や数学的論証で、ぼやけさせられているだけの気もする。」

4.2　提起されている問題

- ゼノンの逆理の分析
  - 追い越せないことを前提に追い越せないことを示している。(Ok)
  - 速度を度外視している (A-Sat,Sas)。
  - 両者の間隔の減少を無視している (Kom)。
  - 亀は止まっているしても問題は同じである。(Sor,Mit,Kat)
  - アキレスが追い付けなくなる、と結論するのがおかしい。(Mit)
  - 時間間隔の変化を度外視している (Tak,Oc,Miyk)。
  - 空間は無限分割できない (Kik)。
- 「当たり前」は当たり前か。(In)
  - 現実には何が確実かはまったくわからないことを示している (Ay)
- 問題設定が曖昧である。(Miyz)
  - 主張の真偽は問題の設定を精密にする仕方に依存する (Ten)
  - 概念が明確に定義されていない。(Sor)
  - 数学的な問題ではない。(M-Sat)
- 詭弁として
  - 「実際には間違いは明らか」で、古代ならともかく現代において考えるのは無意味。(Sak、Suz)
  - ゼノンは議論のための議論をしているが、巧みである。(Ok、Ma、Miyk)
  - ゼノンの反論には反論すればよい。(Ok)
  - 現実を無視した論理の空虚さの例示である (Sor,Mit,M-Sat)
  - 理論的には完全には反論できないだろう。(Nib)
- その他
  - ゼノンの議論はパルメニデスの思想を擁護しているのか (Mom)。
  - パズルとしてはおもしろい (Sas,Ish)。
  - もっと明確な解決があるのではないか ( )
  - 答えも証明も明確なものがないような数学には意味があるのか (M-Sat)

4.3　「実際」と「理論」について

この問題は、現実と論理の間の対立が問われているのではなく、現実についてのいろいろな論理の間の関係が問われている．

- ゼノンが採用した理論化 (記述法) ではアキレスが追い付かないのは記述法自身の構造に由来する．
- 一方「実際に追い付くのは明らか」なのは、実は競争の状況を、時間– 距離の平面による運動表示で記述した場合の記述の中でのことである．

  この記述法では、現実世界は時空として捉えられ、それが数学的平面として表現されている．

  パルメニデスは、存在を時空という形式で捉える尽くせるという考えを拒否した、と解釈したい.
- 「現実に追い付くかどうか」はやってみないとわからない．

  追い付くとしか思えないが、「実際には」いろいろな (予想外の) 事情で追い付かないことは有り得る．

  (再度注意！いろいろな「実際には」はそれぞれ一つの理論化である。)

  とはいえ、 < 実生活 > で「アキレスが亀を追い抜くかどうかはやってみないとわからない」と主張することに意味がある状況はそう多くはない．
- 思考実験は実験ではなく理論である。

4.4　方法的懐疑

知っている知識を深く理解するには、ある時に懐疑することが有効である。

- 何をどこまで懐疑すべきかは明確ではない。それは時と状況に依存している。
- 一度に懐疑できるのはわずかなことだけである。
- 懐疑の念 (何か変だと思うこと) 自身は生命の本質に属する本能的なものであるが、その使い方自身は学ぶ必要がある。

なお、現実的知識 (あすも世界は存在する、世界は今発生したわけではない、欧米は本当に存在する、など) の確実性は、生活がその上に築かれているということ自身であり、生活が動けば確実性は動く。

「様々な知識の確実性の上に生活が築かれている」という言い方は転倒している。「確実性」を自立した理論的なものとして議論しようとすると止めどもない議論に陥る。

- 例 :「明日も太陽が登る」ことには何の保証もない。しかし、正確には「明日も太陽が登ることに保証がある」という文に意味を与えることはできない、というべきである。「明日も太陽が登る」ことは < 保証の有無 > などといった事柄とは何の関係もなく我々の生活の一部となっている。

4.5　問題設定のあいまいさ

1. 学問分野の間で、問題設定の明確さの要求には大きな違いがある。
2. 明確さの有無は問題の重要性とは余り関係はない。
   - 「あいまいな」問題も生産的な機能を果たす。
   - 問題の中には明確にしようとすると肝心なものが消滅するように思えるものがある。(e.g. 生命とは何か。精神とは何か。問題とは何か。形式化とは何か。規則とは何か。)
   - 問題の中には明確にすることが解決であるものもある。工学的な問題はその種のものが多い。(アポロ計画の最初の問題設定は「人を月の上に立たせよ」であった。)
3. 数学では、問題設定が明確になってから研究が始まる。数学的な問題として定式化することが自然科学の主要な努力になる。
4. どの分野でも、肝心な問題は何かというメタ問題はいつもある。

4.6　宿題

- 「砂山の逆理」について考察し、前回と同様の形式の報告を 5 月 2 4 日に提出せよ .
- 「抜き打ちテストの逆理」について考えよ。