

3 第3回：砂山の逆理

きょうの予定

- 命題論理と述語論理の概要
- 砂山の逆理
- 解決へのアプローチ
- 超有限主義

参考文献

- Dummett, M. Wang's Paradox. *Synthese* 30 (1975), 301–324.
- Stanford Encyclopedia of Philosophy, *Sorites Paradox*. 主要な文献はここにある.
オンラインでアクセス可能: “<http://plato.stanford.edu/entries/sorites-paradox/>”.
(なお、この講義のホームページは “<http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw99.html>”)

3.1 命題論理

3.1.1 論理式

与えられた命題（論理式ともいう）から論理演算子を利用して次のように複合命題を作ることができる。

P, Q, R が論理式の時次も論理式：

- $\neg P$ （「 P ではない」）：
 $\neg P$ が正しい $\stackrel{def}{\iff} P$ が正しくない。
- $P \wedge Q$ （「 P かつ Q 」）
 $P \wedge Q$ が正しい $\stackrel{def}{\iff} P$ も Q も正しい。
- $P \vee Q$ （「 P または Q 」）
 $P \vee Q$ が正しくない $\stackrel{def}{\iff} P$ も Q も正しくない。
- $P \Rightarrow Q$ （「 P ならば Q 」）
 $P \Rightarrow Q$ が正しくない $\stackrel{def}{\iff} P$ は正しいが Q は正しくない。

これらを用いて派生的に使われる記号としては論理同値を表す

$$P \Leftrightarrow Q \stackrel{def}{\iff} (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

がある。

3.1.2 真理表

複合論理式の意味は、成分となっている各論理式の真偽値に応じてどのような真偽値を取るかによって定義される。

3.1.3 トートロジー（恒真式）

成分論理式がどのような真偽値をとっても、真となる論理式のことをトートロジー¹という。例としては

- 2重否定が肯定と同じことをあらわす

$$\neg\neg P \Leftrightarrow P,$$

- ド・モルガンの定理

$$\begin{aligned} - & \boxed{\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)} \\ - & \boxed{\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)} \end{aligned}$$

練習問題 次の真理表を作ってトートロジーか否かを確認せよ。

- $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
- $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

3.1.4 論理同値

2つの複合論理式 T, S が論理同値であるとは、 $T \Leftrightarrow S$ がトートロジーであることをいう。このとき $T \equiv S$ と書く。複合論理式の一部を論理同値なものにおきなおしたものは、もとの複合論理式と論理同値である。このことから、4つ論理記号のいくつかを「理論的には」なしで済ますことができる。

例えば、「 $\Rightarrow$ 」と恒偽命題「 $\perp$ 」を使って他の論理記号が次のようにあらわされる：

- $\neg P \equiv P \Rightarrow \perp,$
- $P \vee Q \equiv \neg P \Rightarrow Q,$
- $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \Rightarrow Q).$

¹日常的には、ある主張がトートロジーだ、ということは、それが無意味であるというニュアンスがある。

3.1.5 推論規則

(MP) (Modus Ponens²) $P, P \Rightarrow Q$ が正しければ Q も正しい。これを次のように書く:

$$\frac{P \quad P \Rightarrow Q}{Q}.$$

(棒線の上にある論理式が正しければ、棒線の下にある論理式も正しい)

3.2 述語論理

「は犬である」のように、命題に穴(変数)があるものは、その穴をうめるまでは正しいかどうかは決めようがない。まだうめられていない穴を自由変数という。

$P(x)$ を自由変数を 1 つ持つ命題とし、それを x とする。(例「 x は犬である」、「私の年令は x 才である。」)これから正しいか否かを議論できる文を作る方法として、具体的なものを x に代入する以外に

全称化 $\forall x [P(x)]$ ($P(x)$ はすべての x について正しい)

「すべての x 」は「亀は犬である」といった無意味な文まで出てくるので通常はどいう範囲の中ですべてかを明記して、

$$\forall x \in A [P(x)]$$

と書いて「集合 A の中のどの要素 x も $P(x)$ を満たす」をあらわす。たとえば、

$$\forall x \in \text{Dogs} [x \text{ は 4 本足} \wedge x \text{ は吠える}].$$

(ただし Dogs は犬の集合)

存在化 $\exists x [P(x)]$ ($P(x)$ を満たす x が存在する) 上と同様に

$$\exists x \in A [P(x)]$$

と書いて「 $P(x)$ を満たすもの x が集合 A の中にある」をあらわす。たとえば、

$$\exists x \in \text{Dogs} [x \text{ は計算ができる} \wedge x \text{ は字は読めない}].$$

変数 x は $\forall x$ または $\exists x$ によって束縛されるという。その変数はもはや穴ではなく、単に「すべての」や「存在する」が修飾しているものを表す役割にかわっている。

3.3 数学的帰納法

数 n についてのある性質 $P(n)$ すべての自然数 n について成り立つこと、すなわち

$$\forall n \in \mathbf{N} [P(n)]$$

を示すときに、次の推論規則を用いる。

²仮言三段論法 (hypothetical syllogism) のなかの肯定式と呼ばれるもの

$$\frac{P(0) \quad \forall n \in \mathbf{N} [P(n) \Rightarrow P(n+1)]}{\forall n \in \mathbf{N} [P(n)]}.$$

3.4 Sorites Paradox

ミレトスのエウブリデス (Eubulides) (メガラ派の論理学者) によるものとされている。“sorites” は山 (「わらの山」などの山) を意味するギリシャ語に由来する。1 粒の米は、米の山にはならない。2 粒もならない。米の山ではない、米粒の集まりに 1 粒の米粒を加えても米の山にはならない。従って、どれだけ米粒を集めても、米の山にはならない、というパズルであった。

これは、多くの感覚に依存する形容詞にあてはまる。

小さい数に 1 を加えても小さい数であることは当然と思われる。 $S(n)$ で「 n は小さい数である」をあらわすと、どの数 n についても

$$S(n) \Rightarrow S(n+1).$$

また $S(1)$ は明らか。従って、数学的帰納法により、どの数も小さいことになる。

3.4.1 別の表現

$$\frac{S(1) \quad \neg S(n)}{\exists i [S(i) \wedge \neg S(i+1)]}$$

「小さくはない数 n があったとする。そのような数の中で一番小さな数を i とすると、 $i-1$ は小さい。従って、 $i-1$ は小さいのに i は小さくはないような i が存在する。」

3.4.2 解決へのアプローチ

Sorites の議論の前提は、

(P0) $S(0)$ は正しい.

(P_n) $S(n) \Rightarrow S(n+1)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

推論規則は、

(Modus Ponens)
$$\frac{S(n) \quad S(n) \Rightarrow S(n+1)}{S(n+1)} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

を繰り返し適用することに過ぎない。しかし、「繰り返し適用することに過ぎない」で済ましていいかというメタ言語の表現自身が問題になると思われるので、これも推論規則として明示的にしておこう：

(PS)
$$\boxed{\frac{S(0) \quad S(0) \Rightarrow S(1) \quad S(1) \Rightarrow S(2) \quad \cdots \quad S(n) \Rightarrow S(n+1)}{S(n+1)}}$$

3.5 「解決」の紹介

S という述語の「あいまいさ」⁴が原因と思われるが、「概念のあいまいさがどのように逆理を生み出しているかを明確にせよ」が問題である。

3.5.1 理想言語に基づくもの

本当はあいまいさのない概念があるのに、自然言語では面倒臭いのであいまいな概念を使っているだけである、と考える。この逆理によってあいまいな概念は排除しなければならないし、自然言語から排除できると考える。

3.5.2 認識論的応答

「すべての n について P_n 」を認めない。 S は明確な概念なのであり、ある n については $S(n) \Rightarrow S(n+1)$ は正しくないのだが、その n についてそれが正しくないのか認識することが難しいためにそういう n がないかのように感じることから生じる逆理であると考え。

³polysyllogisms, 「連鎖式の推論規則」

⁴ S が成り立つか成り立たないか明確な基準がないことをあいまい (vague) と呼ぶ。意味が複数ある、というときのあいまいさ (ambiguity) と混同しないように。)

3.5.3 超付値 (supervaluation) のアプローチ

これは、逆理が論理自身の改訂の必要性を示唆するものとする立場の一つ。いろいろな厳密化の束を考えて、命題の真偽値が2値であることを認めない。これによって、推論規則が変化する。

3.5.4 多値論理

これも上と同様の立場だが、命題の真偽値が $0, 1$ の間の実数を取ると考える。ファジー論理と呼ばれる。しかし、高次のところでは古典論理であり、高次のあいまいさには素朴には対応しない。

3.5.5 判別できない違いを持つ観察概念は矛盾を含む

例：時計の分針の動き。色あい。

$$x = y \wedge y = z \wedge x \neq z.$$

これはもちろん、等号の推移律と矛盾する。

3.5.6 数の不定性：弱無限かつ弱有限な自然数列

Essenin-Volpin は、自然数列は唯一に定まらない、と主張した。

数列が弱無限であるとは、最後の項がないことをいう。例えば、うまれてから n 回目の心臓の鼓動が、子供のときにしたのであれば、 n を c -数と呼ぶとする。すると大人になった人にとっては c -数の全体は弱無限である。

数列が弱有限であるとは、その数列のどの項よりも大きな自然数があることをいう。例えば、 c -数は、10 億を超えることはない。(100 年は約 30 億秒⁵.) 「弱無限かつ弱有限な自然数列はたくさんある」という主張は、帰納法によって $S(n)$ が正しいと示される n の範囲は定まらないことを意味し、砂山の逆理は、数の概念の不定性を意味していたと考える。

⁵ $60 \times 60 \times 24 \times 365 \times 100 = 3,153,600,000$

3.5.7 Dummett1970 の結論の吟味

Dummett は Wang's Paradox 1975 において次のように結論している。

- (1) 識別不能な違いが非推移的なとき、観察概念は必然的にあいまいである。
- (2) このとき、その概念の使用は本性上、矛盾を避けられない。
- (3) 砂山の逆理は単にこの矛盾の反映でしかない。あいまいな述語の使用規則に従った帰納による推論には問題ないが、この使用規則自身に矛盾があった。問題は論理にあったのではなく概念自身にあるので、砂山の逆理を解決するために、新しい無矛盾な論理を導入しようとするのは無意味である。
- (4) 弱有限かつ弱無限数列を定める概念はあいまいなので、(2) により、矛盾を持ち、それを数学の新しい構築の基盤とするのは望めない

ここでは、分針の歩みの持つ刻々の位置のあいまいさと、子供時代の心臓の鼓動回数の全体とが同じものであるとして、弱有限かつ弱無限数列、とい概念が退けられている。

しかし、2つの違い

- 心臓の鼓動を数える時間スケールと子供から大人になるという変化を見る時間スケールの違い
- 分針が動いて見える時間スケールと動いては見えないが動いているという時間スケールの違い

の間にある、質的な違いが見過ごされているように思われる。分針の場合は、ちょっと辛抱していると、気を散らさずに動いていないものが動いたように見えることを観察できる、いわば、同じ時間スケールの中での出来事に過ぎない。しかし、鼓動数については、一方は実際に観察できるが、子供から大人への変化の観察は、記憶やエピソードなどに依存するものであり、観察の意味すら異なる。

砂山概念の矛盾性を、「分針が動いた」という概念の矛盾性に過ぎないとするのは飛躍と思われる。実際に、分針の場合の議論を砂山概念には適用できない。(分針の場合は1から60くらの見渡せる範囲で違いがでてくる。)

3.6 私の現在の結論

砂山の逆理は真正であり、それは、自然数の概念の改訂を必要とする。