

11 第 11 回：無限のパラドックス (2)

きょうの予定

- 「無限集合」の正当化：ヒルベルトの有限の立場
- クリプキの懐疑

11.1 「数学の確実性」の根拠としての記号

数学の〈確実性〉は広い意味での「記号」への信頼に基づいていると思われる。

11.1.1 記号の確実さ

1. 数字や文字列は、迷ったときに何度も立ち戻ることができる、〈確実な〉出発点と考えられる。
2. しかし、特定の文字列が「それだけで」確実さの根拠となるのだろうか。
3. この文字列の「読み方」や「使い方」の熟知が前提となって、この文字列が頼りになる。
4. 文字列の使い方に確実さはあるのか。
 - (a) 文字列の明確な操作法とされているものに、書き換え操作がある。
 - (b) 「 $axc12a$ という文字列の中の x を 432 に置き直せ」と言われたときほとんど間違いなく $a432c12a$ に変化させるはずだ。
 - (c) しかし、たとえば、
 - いつ書き換えてよいか、
 - 書き換えた文字列をどこに書くか
 - 他の部分の修正は必要ないのか
 などの了解も前提となっている。
 - (d) これからわかるように「 x を 432 に置き直せ」は、それだけで「明確な操作」というわけでもないのである（クリプキの懐疑論はそこを追及する）。
5. このことから、記号の不変性と記号処理の明確さによって、数学の確実性を了解するわけにはいかないように思われる。

11.1.2 例：無限公理

たとえば、無限集合が存在することは次のラッセルの無限公理で表現される。

$$\exists x [\emptyset \in x \wedge \forall y [y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x]]$$

これはどういう使い方を前提としているか。

11.1.3 $2 + 2 = 4$ 証明図

図 1 は、ペアノの公理系で $2 + 2 = 4$ を示す証明図である。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{}{\forall x.\forall y.(x+sy)=s(x+y)}}{\forall y.(so+sy)=s(so+y)}}{so+so=s(so+o)} \quad \frac{\frac{\frac{}{\forall x.(x+o=x)}}{so+o=so} \quad \text{対称律} \quad \frac{\frac{}{x=x}}{\forall x.x=x}}{so=so+o} \quad \frac{\frac{}{x=x}}{\forall x.x=x}}{sso=sso} \quad (P(z) \equiv sz = sso) \\
 \hline
 so+so=sso \quad \text{推移律}
 \end{array}$$

図 1: $2 + 2 = 4$ の証明図

11.2 形式系の吟味 (§10.10 の続き)

「集合」がヒルベルトの立場 (公理的集合論) でどのように扱われるかを見てみよう。

重要な点は、数学基礎論を推進させた原動力は、「無限個のものの集まりなど」というものは語義矛盾であるから素朴に考えようがない。しかし、これがあると数学で実に便利だ、どうしたらよいか。」という切迫した気持ちにあった。

- (1) まず、最初は set と呼ばれるものがある、とする。
- (2) これは無定義用語で、間違っても「ものの集まり」などと関係があると考えてはいけない。(さもないと「無限のものの集まり」というナンセンスな言葉を扱うことになる。)
- (3) 公理により、具体的に書ける set として、emptyset $\emptyset$ という「具体的な」set が登場する。また、これを出発点に、 $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ などの set が作れる。こういった set は、集合そのものと見えてしまうが、それは慎まなければならない。あくまで、無意味な set という言葉を操っているだけだ。
- (4) これによって自然数を set として表現できる: emptyset を 0 とし、 $\{\emptyset\}$ を 1 とみなし、 $\{n\} \cup n$ を $n+1$ と見なす。
しかし、 10^{100} のような <数> は、具体的 set としては登場し得ない。これを set として上のように表示しようとすると宇宙全体を使っても足らなくなるから。
- (5) 無限公理によって、 $\vdash x \in z$ となる具体的な set x を $0 \in z, 1 \in z, 2 \in z, \dots$ などと、次々と作れる set z が「存在する」ことが「保証される」。
- (6) 数学の命題はすべて、set についての述語論理式として表現できる。したがって哲学者の心配は脇において、無限集合も問題なく話題にできる。
- (7) ただし、この公理系が矛盾を孕んでいると、上のやりかたは意味がなくなる。そのた

めに無矛盾性を確認しておかなければならない。

無矛盾性はゲーデルの不完全性定理により結局、公理的集合論の中では証明できないことが「示されている」が、素朴なレベルで無限集合の存在は現代数学を支える大地となっている。

数学者は素朴集合論に何の抵抗も感じていないし、数学基礎論でも無限集合はヒルベルトが感じたようなためらいは消滅し「一つの面白く難しい分野」に成長した。

- 数学の根拠は何か？根拠は必要か？(例：明証性、数学者の共同体、etc)
- あるいは、数学の本性は「確実性」にはないのか。しかし、人間の生活に見られる確実性の中では最も純粋な「確実性」である。
- 「確実性」自身の意味が問題となる。

11.3 ウィトゲンシュタインからの引用

- [1] 「私の無限の説明は再三再四無限それ自身によってのみ可能なこと、すなわち、無限は説明できないこと、このことはなんら驚きではないのである。」([Witt, 第 2 巻 §138])
- [2] 「数体系、例えば十進法、の規則は、数に関する無限の全てを含んでいる。例えばこれらの規則が数記号を右側にも左側にも制限しないというまさにその点に、無限性が表現されているのである。
あるいは、なるほど、しかし数記号はそれでもその使用、筆記用具、その他の状況によって制限されているではないか、と言われるかもしれない。なるほどそうである。しかしこのことはその使用に関する規則に表現されてはいない、そしてその固有の本質が表明されるのは専らこの規則においてのことである。」([Witt, 2. §141])
- [3] 「無限な数系列自身は、それに対する唯一のシンボル $(1, x, x+1)$ から明らかに生じてくる可能性にすぎない。このシンボル自身が矢であり、最初の 1 が矢の羽根、 $x+1$ が矢の尖端である。そして矢の長さが非本質的であるように、ここでは変数 x が、矢の尖端が羽根からどれだけの距離にあるかはいつでもよいことを表示しているのが特徴的である。(中略)
ある一つの方向に無限に多くの物があることができる、と語ることに意義があるものの、しかしそこに無限に多くの物がある、と語ることに意義がない、——このようにも言えるのである。」[Witt, 2. §142]
- [4] 「「仮に我々が無限な展開を知っているとすれば、その時は実無限の話をするのは問題ないであろう」と語ることは、実は「アブラカダブラ感覚が存在すれば、アブラカダブラ的な感覚による知覚について話すのは問題ない」と語るのと同じことなのである。」([Witt, 2. §144])
- [5] 「われわれは数概念の定義を求めるものではなく、「数」という言葉および数詞の文法を呈示することを試みる」[Witt, 4.p118]¹
- [6] 「論理的な概念、たとえば無限という一般的な概念(あるいはそのうちの一つ)については、本質がその存在を証明する、とすることができる。」[Witt, 4.p119]
- [7] 「「無限集合」と「有限集合」とは、別の論理的範疇なのである」[Witt, 4.p327]
- [8] 「ある技術に限界がないということは、それが止まることなく進み続ける - - - 測りきれないほど増大するということではなく、それに終わりの設定が欠けていること、完結していないということである。」[Witt, 7.p125]

¹(4.p118) は全集第 4 巻の p118 ページを意味する。

参考文献

[Witt] ヴィトゲンシュタイン全集．大修館書店 1976.