

10 第 10 回：無限のパラドックス

きょうの予定

- 「共通知識」(続き)
- ライフゲームの観察
- 無限の逆理

10.1 嘘つきの逆理に関するレポート

二瓶君のレポートより：

1. 逆理は成立しない。理由：
 - (a) 「この」という言葉を用いる際我々は指示対象を外部に求める。
 - (b) 「この文は正しくない」の「この文」の指示対象文はどこにもない。
 - (c) したがって「この文は正しくない」は命題ではないので、逆理の前提が崩れる。
2. 補足：「正しい」という言葉には「真」としての側面と、個人の裁量に還元される側面とが含まれる。
 - (a) マクス＝ウェーバー「真と偽、善と悪の区別も力への意志の相関物でしかない」
 - (b) 「正しい」は非論理的な側面を持ちうる。そのとき、命題は真偽の明確な二元論に帰結することが困難である。

10.2 共通知識 (続き)

皆が各々知っていることが共通知識となることにより何が変わるのか。

10.3 ライフゲーム

簡単な力学系で複雑な振舞いをするもので有名なものがライフゲームである。これは、碁盤の上に石を置き、次の規則で石を取るか置くかそのままにするかを決める。その場所の周囲 8 マスにある石の数が 3 個～4 個のときに限ってそのマスに石を置く (か残す)。

10.4 実無限と潜在無限

アリストテレスは可能的無限と現実的無限を区別した。

可能的無限 どの数を考えても次の数があり、どの瞬間を考えても次の瞬間があり、どの場所を考えてもその場所を含む場所が考えられる。この意味で、数も時間も空間も可能的無限性を持つという。これは現実の持つ自明な様相である。

現実的無限 これに対し「数の全体」・「時間の全体」・「空間の全体」は無限が現実にも目の前にあるということを想定することになる。しかし、この想定が何を想定しているかは不明であるため、アリストテレス以来 2 千年近く、「現実的無限」は無意味であるとされてきた。

10.5 無限の逆理

すでにゼノンの逆理で無限にかかわる問題を扱ったが、他にも無限についての逆理は数多くある。

カントール以来、無限集合は数学では公認されている。 N を自然数全体の集合とする。

偶数と自然数 N の中で偶数は半分しかないように見える。しかし、 n と $2n$ を対応させると、 N の偶数とは 1 対 1 に対応する。したがって偶数の全体と自然数の全体とは「同じだけたくさん」ある。

偶数と平方数 それどころか、平方数 $1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots$ は自然数の中で例外的だが、やはり $n \leftrightarrow n^2$ という対応で 1 対 1 に対応する。したがって、平方数の全体と自然数の全体とは 1 対 1 に対応する。

無限集合の定義 デデキントは、この逆理を利用して無限集合を定義した：

集合 X が無限であるとは、 X がその一部 Y と 1 対 1 の対応がつけられることをいう。

10.6 無限集合は存在するか

アリストテレスの心配などなかったかのように、現代数学では、無限集合は机や椅子と同じくらい現実感のあるものとなっている。しかし「自然数全体の集合」という言葉は実無限の存在を認めているわけではない。これはいわば便利な言葉として使われているだけだということができる。

便利な言葉として使うと言っても、整合性を持って使うのは容易ではない。下手をするとすぐに矛盾に遭遇しかねない。そこで公理主義（形式主義）が使われる。

10.7 ペアノの公理系

自然数の公理系はいろいろあるが、デデキントによるものが有名である。記号 $x, y, \dots$ は数を表し、 o は 0 を表す。 sx は x の次の数を表し、 $x + y, x \times y$ はそれぞれ和と積を表す。

公理

1. s の公理

$$\neg(o = sx),$$

$$sx = sy \Rightarrow x = y,$$

2. 演算の公理

$$x + o = x,$$

$$x + sy = s(x + y),$$

$$x \times o = o,$$

$$x \times sy = x \times y + x,$$

3. 数学的帰納法

$$P(o) \wedge \forall x.(P(x) \Rightarrow P(sx)) \Rightarrow \forall x.P(x)$$

ただし, $P(x)$ は論理式.

推論規則

1. 命題論理の推論規則:

$$\frac{p \wedge q}{p} \quad \frac{p}{p \vee q} \quad \frac{\neg \neg p}{p}$$

など.

2. 等号の推論規則:

$$\frac{x = y, y = z}{x = z} \quad \frac{x = y}{y = x} \quad \frac{x = y, p(x)}{p(y)}$$

3. 分離規則:

$$\frac{p \Rightarrow q, p}{q}$$

4. $\forall$ の規則:

$$\frac{\forall x.p}{p[x/f]} \quad \frac{p(x)}{\forall x.p(x)}$$

(後者は付帯条件付き)

10.8 スコーレムの逆理

たしかに、公理系で用いられる $\forall x$ (すべての x について) は「自然数の全体」を前提とした表現になっているので、それを用いて「自然数の全体」の存在を保証するのは難しい。

事実、無限集合の存在を仮定しても

「上の公理系を満たす「数の集合」はただ一つには決まらない。」

という定理がある。これは当初逆理と考えられていたが、「自然数の集合」が複数あることを使う超準数学の基礎となっている。

10.9 形式的体系の健全性と完全性

形式系が健全である(sound)とは、証明される命題は正しいことをいう。

形式系が完全である(complete)とは、どの命題も、証明できるか反ばくできる(すなわち、その否定命題が証明される)かのいずれかであることをいう。

形式系が矛盾する(inconsistent)とは、ある命題とその否定命題の双方が証明されることをいう。矛盾しないとき、無矛盾である(consistent)という。

形式系がカテゴリカルであるとは、「それを満たす集合」(モデル)が一つしかないことをいう。

自然数の公理系は健全だが完全はない。カテゴリカルでもない。無矛盾かどうかは証明されない。

10.10 形式系への懐疑

自然数のあいまいさと同じ意味で、公理系もいろいろな面であいまいである。

1. 論理式の定義.(長さ 10^{100} の論理式は存在するといえるのか.)
2. 証明可能性の定義.(長さ 10^{100} の証明図は存在するといえるのか.)
3. 「いつか矛盾するかもしれない」というおそれにどういう意味があるのか。(無限小数と同じ懐疑) 矛盾したら理論を修正すればよい。

10.11 数の確実さと不定性

「数が不定である」は「赤色が不定である」とは意味が違う
数には色々な姿がある。

- ものの個数。
- 操作の回数。
- 10進法で表される数。

- 加減乗除ができる数。

小さい数については、数がどういうものかはかなり明確に思われる。しかし、 10^{100} は「数」と言えるだろうか。掛け算や足し算などではできるので数のようだが、回数や個数としての意味は現実にはなくなってくる。

10.12 宿題

クリプキの懐疑論について考えてみよ。

これまで 51 未満の数しか足し算をしたことがない人が 51 プラス 27 を計算して 78 であるという答えを出したとき、その人は、その答えを正当化することはできない。なぜならば、次のように主張する懐疑論者に反論できないからである。「答えは 5 である、なぜならば、あなたは、これまで次のクワス演算 $\oplus$

$$n \oplus m = \begin{cases} n + m & n, m < 51 \\ 5 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を行っていたに違いないからである。」

誤解の例。

誤解 1: アルゴリズム. 「足し算のアルゴリズム (たとえば小学校で習う十進法を用いて縦書きで行う足し算の仕方) を思い出せばクワスなど論外で $51 + 27 = 78$ と納得できるではないか。」

誤解 2: 暗黙の了解. 「十進法による計算の中には、日常的な当たり前の動作しか出てこない。どういう動作かは有限個の例で十分はっきりわかる。51 を越えたら 0 と 5 を上下に書くなどという不自然なことをする余地はない。」

誤解 3: 脳中の回路. 「アルゴリズムの使い方のような素朴な動作は、自分の脳の中に回路として組み込まれているので、初めての足し算もどうやるべきか明確にわかるのだ。」

誤解 4: 数学とは無関係. 「この懐疑は、数学的写像を具体的な数に適用するときに生じるあいまいさから出てくる。理論と現実の間の越えることのできないギャップの問題でしかなく、数学自身とは関係ない。」

誤解 5: 過去の記録との照合. 「以前に計算した時の計算ノートを開いて、今やった計算が同じであることを確認できるではないか。」

誤解 6: 単なる揚げ足取り. 「たしかにいつまでたっても計算の正しさは完全には納得できそうもない。しかし、そこまで確信しなければならないのであれば何もできなくなる。そういう無益な病的な揚げ足取りはやめて、確実な知識を積み重ねていこうではないか。」