1999 年度前期 数理の世界：逆理の意義

資料 1999.4.12 Ver. 1.01,

辻下　徹[1]（理学研究科数学専攻）

1　第一回：序

講義の目的.　大学では、新しい知識をたくさん学ぶが、それを通して知り方（考え方）自身を深めること（深めざるをえないこと）が重要である。知識自身はそのまま使えることは少ないが、知り方自身は空気のように役に立つものである。

知り方の中でも論理的思考が大学では中心的な役割を果たす。この講義では様々な逆理を分析し論理的思考の裏表を考えると同時に、逆理を通して無限・時間・言語・生命についての理解を深める。

成績評価の方法　出席、レポートに基づき判定する。

ホームページ　：

"http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw99.html"

参考書

- R.M. セインズブリー著（一ノ瀬正樹訳）「パラドックスの哲学」（勁草書房 1993) ISBN4-326-15277-X.
  主要なパラドックスをいろいろな角度から分析している。
- 野崎昭弘著「詭弁論理学」（中公新書 No. 448, 1976) ISBN 4-12-100448-5.
  パラドックスと詭弁について、多くの身近な具体例を挙げて吟味する。読み物としても面白い。
- A.W. ムーア著（石村多門訳）「無限– その哲学と数学」（東京電機大学出版 1996）ISBN 4-501-61490-0. 無限をテーマに、古代からの思想家の考えを紹介し、著者自身の思想を展開。無限に関連するパラドックスを詳しく分析している。

きょうの予定

1. 矛盾と逆理について
2. 例：ラッセルの逆理
3. 主要な逆理

[1]TEL:706-3823, Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
URL:"http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/"

1.1 矛盾と逆理

1.1.1 矛盾した議論

議論の中で、ある主張とその否定とが証明されるとき、その議論は矛盾している (整合的ではない、一貫していない) という。

議論が矛盾するとき、何かがおかしいと考える。

1.1.2 議論 (推論) についての公理

正しい理論の中では、正しい前提から、正しい推論の繰り返しによって得られる結論は正しい。

この対偶をとると

議論の結果矛盾が生じたとき、

- 前提が正しくないか、
- 推論の仕方が正しくないか、
- 理論が適切でないか

のいずれかである。

1.1.3 応用例：背理法.

理論と推論が正しいという確信があるとき、結論が正しくなければ、前提が正しくない。

復習：$\sqrt{2}$ は有理数ではない。

$\sqrt{2}$ が有理数とする。すると $\frac{n}{m} = \sqrt{2}$ となる、互いに素な整数 $n, m \neq 0$ がある。両辺を自乗すると $n^2 = 2m^2$ となる。n^2 が偶数なので n も偶数となり $n = 2k$ と書くことができる。これを代入すると、$4k^2 = 2m^2$. 従って $2k^2 = m^2$ となる。これより m も偶数となる。従って m, n は共通因子 2 を持つ。これは、m, n が共通因子を持たないことに矛盾する。

この矛盾から、ふつうは $\sqrt{2}$ が有理数とする と仮定したのが間違っていたと考えて、$\sqrt{2}$ は無理数である、と結論する。

しかし、「 論理的に言うと 」

- 有理数は互いに素な整数 m, n により $\frac{n}{m} = \sqrt{2}$ と書ける。
- 数の体系が正しい。

なども疑いうる。

1.1.4 パラドックス

ある議論において矛盾が生じたのだが、理論も前提も推論もすべて妥当と思われる場合に、その議論をパラドックス (逆理・逆説・背理) という[2]。

似た言葉としてアンチノミー (2 律律反) がある。これは、一見妥当な 2 つの議論により正反対の結論が得られることをいう。カントのアンチノミー (「時間には始まりがある」対「時間には始まりはない」) が有名。

詭弁は、正しくない理論または前提または推論を、相手に気付かれないように用いて、正しくない結論を導くもののことをいう。詭弁の分析と逆理の分析とは似た作業であるが、易しい作業であることは言うまでもない。

1.2 ラッセルの逆理

> 外延性公理: どんな性質についても、それが明確なものであれば、それを満たすものの全体が集合をなす。

記号 $P(x)$ が「x は 性質 P を満たす」をあらわすとき、外延性公理が存在を保証している集合を $\left\{ x \;\middle|\; P(x) \right\}$ とあらわすことにする。

ラッセルの逆理 **(1910).**

「自分自身を含まない」という性質が決める集合

$$R := \left\{ x \;\middle|\; x \notin x \right\}$$

は、自分を含むことはなく、また自分を含まないこともない。
証明. R が自分を含むとするならば、R は R を定義する条件 $x \notin x$ を満たすので、$R \notin R$ となり矛盾。従って R は R の要素ではあり得ない。しかし R が R の要素ではないとすると、R は R を定義する条件 $x \notin x$ を満たすことになるので、 R は R の要素となり、やはり矛盾する。
従って、R は自分を含むことはありえず、しかし、自分を含まないこともありえない。これは R は自分を含むか否かのどっちかであるという排中律に矛盾する。

[2]岩波哲学事典におけるパラドックスの項 :「言葉のもともとの意味では、<パラドックス> とは一般に受け入れられている見解に反する命題 (ギリシア語で paradoxa) をいう。しかし、論理学でこの言葉を厳密な意味で用いるときは、証明されるはずのない矛盾命題が妥当な推論によって、あるいは少なくとも一見妥当な推論によって導かれることを <パラドックス> と呼ぶ。古代ギリシア以来、哲学では種々のパラドックスが論じられてきており、哲学的思索を深めてきたり新たな科学的洞察を生み出すことに貢献してきた。(以下略)」

1.3 主要な逆理

この講義で取り上げる主な逆理を紹介しよう。

1.3.1 アキレスと亀

アキレスと亀が競走をした。アキレスは亀より１００倍速く走るのでハンディをつけて、亀のスタート位置をアキレスより先にすると、アキレスは亀には追いつけなくなってしまう。理由はこうである：亀のスタート位置にアキレスが達したときには、亀は少し先に進んでいる。そこにアキレスが達したときには、亀はさらに少し先に進んでいる。このように亀が居るところにアキレスが達しても亀はいつもその先に進んでいるので、アキレスが亀に追い付くことはあり得ないのである[3]。

1.3.2 砂山のパラドックス

1 粒の砂は砂山ではない。n 粒の砂が砂山でなかったら、$n+1$ 粒の砂も砂山ではない。従って数学的帰納法により、すべての n について、n 粒の砂の集まりは砂山にはならない。

1.3.3 古典論理のパラドックス

古典論理においては、どのような 2 つの主張 P, Q についても、$P \Rightarrow Q$ か $Q \Rightarrow P$ のいずれかが成り立つ。

1.3.4 コンウェイのパズル兼パラドックス

２つの数の和が和田氏に伝えられ、積が積谷氏に伝えられた。２人は次ぎのような会話をした。

和田：僕には 2 つの数がいくつかはわからない。

積谷：君にわからないことはわかっていたよ。私もまだ 2 つの数がいくつかはわからない。

和田：わかったよ。今、君が言ったことから、２つの数がいくつかわかったよ。

積谷：僕もだ。君がわかったと言うので、２つの数がいくつかわかった。

さて、２人は何も具体的な情報を交換していないのに、どうして 2 つの数がわかったのであろうか。また、２つの数はいくつか。

1.3.5 抜き打ちテストの逆理

西先生が予告して言った「来週月曜日から金曜日のいずれかの日に算数のテストをします。その日にテストがあるとはだれも予測できないようにします。」これを聞いた生徒の東はこう思った。「そのようなことはできない。なぜか。金曜日までテストをしなかったら、金曜日がテストだということがわかってしまう。 だからテストは金曜日ではありえない。すると、木曜日までテストがなければ木曜日がテストだ、ということがわかってしまうので、木曜日にもテストはできない。同様の議論によって、月曜日でもテストはできないことになる。だから、西先生は約束に違わないようにテストをすることはできないのだ。」そう考えて東は勉強をしなかった。ところが、西先生は水曜日にテストを実行した。東は憤慨して、約束が違うと抗議すると、西先生は「きょうテ ストがあると予想していたかい。」と言った。

1.3.6 うそつきパラドックス

ライアー氏が「わたしは今嘘をついている」といった。この主張は嘘だろうか。もしも嘘でなければ、嘘をついていることになる。もしも嘘ならば嘘をついていないことになる。だからライアー氏が言ったことは嘘でもなければ嘘でないこともない。

1.3.7 柔らかい格言のパラドックス

「どんな格言にも盲目的に従ってはいけない」という格言に従うことはできるだろうか。

1.3.8 心脳同一説の逆理

心理的現象は脳内の生理的事象に附随していると仮定しよう。そうすると、どの概念 X も当然、なんらかの脳内事象 $[X]$ に対応していることになる。さて、概念に対応する脳内事象 ($[X]$ 型の事象) についての概念を内省概念と呼ぶことにしよう。内省概念 A が自己否定的である、ということを $[A]$ が A という概念にあてはまらないこと、と定義する。そうすると、自己否定的という内省概念は自己否定的でもありえず、自己否定的でないこともありえない。実際、概念「自己否定的」N が自己否定的ならば、$[N]$ は N という性質、すなわち自己否定的という性質を持たない、すなわち、自己肯定的である、これは矛盾、従って、「自己否定的」という概念は自己否定的ではありえない。一方、N が自己否定的でないとすると、$[N]$ は N を満たす、すなわち自己否定的となるり、矛盾。従って、「自己否定的」という概念は自己否定的でないことはあり得ない。[4]

1.3.9 ルイスキャロルの無限後退

アキレス：この三角形の 2 つの辺は長さが同じである。ゆえに、2 つの角が同じである。

亀：どうして？

アキレス：「 2 等辺三角形の 2 底角は等しいということをさっき示しただろう。つまり、P が示され、「$P \Rightarrow Q$」が示されているのだから、Q が示されたのさ。」

亀：どうして, P と $P \Rightarrow Q$ がわかったら Q がわかるのかがかわからないよ。

アキレス：だれでも知っている推論規則

$$\frac{P, P \Rightarrow Q}{Q} \qquad (*)$$

を知らないのか。これを使えばいいのさ。

亀：知っているよ。しかし、どうして、P,$P \Rightarrow Q$ と推論規則 $(*)$ から Q がわかるのかがわからないな。

アキレス：推論規則を使う規則

$$\frac{P, P \Rightarrow Q, \dfrac{P, P \Rightarrow Q}{Q}}{Q} \qquad (**)$$

は幼児でもない限りわかるはずだから、ふつうは言わないよ。

亀：しかし、$P, P \Rightarrow Q$,$(*)$,$(**)$ からどうして Q がわかるのかがやっぱりわからないよ。

こうして、アキレスは亀の厳格さをパスすることはできないのであった。

1.3.10 ウィトゲンシュタインの逆理

これまで 51 未満の数しか足し算をしたことがない人が 51 プラス 27 を計算して 78 であるという答えを出したとき、その人は、その答えを正当化することはできない。なぜならば、次のように主張する懐疑論者に反論できないからである。
「答えは 5 である、なぜならば、あなたは、これまで次のクワス演算 $\oplus$

$$n \oplus m = \begin{cases} n+m & n,m < 51 \\ 5 & otherwise \end{cases}$$

を行っていたに違いないからである。」

1.4 宿題

アキレスと亀のパラドックスでは、何がおかしいかを考えよ。