2000 後期 数理の世界　第 9 回

思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

目 次

5　有限力学系 (続き)

5.3　有限力学系に関する基本概念

- $x \in X$ の軌道 $O(x)$ とは集合 $\left\{ \tau^i x \;\middle|\; i = 0, 1, 2, \cdots \right\}$.
- $x \in X$ が周期点であるとは、$\tau^p x = x$ を満たす $p > 0$ があることをいう。このような p の中で最小のものを x の周期 という。
- $\tau x = x$ を満たす x を固定点という。これは周期 1 の周期点である。
- $Y \subseteq X$ が部分力学系であるとは、$\tau Y \subseteq Y$ を 満たすものをいう。軌道は部分力学系である。周期点の軌道は部分力学系であるが、これをサイクルと呼ぶ。サイクル γ と交わる軌道は γ を含む。$O(x) \bigcap \gamma \neq \emptyset$ であるような x の全体を $B(\gamma)$ 書き、サイクル γ の鉢(basin) という。
- 2 つの離散力学系 (X_i, τ_i) $(i = 1,\ 2)$ に対し、写像

  $$\alpha : X_1 \to X_2$$

  が $\alpha \circ \tau_1 = \tau_2 \circ \alpha$ を満たすとき、力学系準同型であるという。
- α が全単射であるとき同型写像といい、(X_1, τ_1) と (X_2, τ_2) とは同型であるという。
- 2 つの離散力学系があると、それらのグラフを並べたものは、一つの離散力学系のグラフと考えることができる。これを、力学系の直和という。

  力学系は、空でない 2 つの力学系の直和と同型にはならないとき既約であるという。

5.4　有限力学系の構造定理.

1. 有限力学系は既約な部分力学系の直和と同型である：

[1] URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html
質問提出アドレス:sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp

[2] 研究室：理学部 4 号館 4 0 3 号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

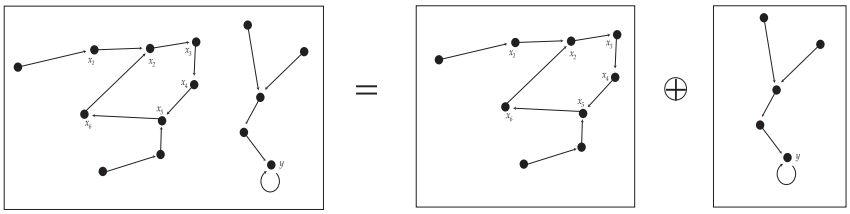

図 1: 直和

2. 有限な既約力学系には
   - 唯一つの周期力学系が部分力学系として含まれ (これをアトラクタという)
   - どの状態から出発してもやがてはこのアトラクタに達し、周期的な変化をする。(サイクルに属さない状態を一過的(Transient) な状態という。)

証明の概略. (X, τ) を与えられた有限力学系とする。

1. X の周期点の全体を X_o とする。
2. X_o には $x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} O(x) \ni y$ により同値関係が定義される。それによる同値類への分割を
$$X_o = \coprod_i X_o^i$$
とかく。
3. $X^i := \left\{ x \;\middle|\; O(x) \bigcap X_o^i \neq \emptyset \right\}$ とおくと、
$$X = \coprod_i X^i$$
となる。これが求める直和分割である。
4. Y を X の既約な部分力学系とすると、$Y \subseteq X^i$ となる i が唯ひとつ存在する。これより、直和分割の唯一性がわかる。

A　以前のクラスでの質疑

A.1　前回の質問表

[**Qcs-1**]() 状態空間は「観測できるもの」、「状態遷移規則」は「物理法則」に当てはまるものと考えていいのでしょうか？」

[**Acs-1**] 観測できるものの中に物理法則が見出されたときには、力学系的な記述が使えるようになります。しかし、世界は因果律で支配されている、というのはもっと根本的な作業仮説であると思います。

[**Qcs-2**]() $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ のときのサイクルの周期は n というような図がありましたが、その意味がわかりません。$\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$ の時の周期は１３ではなかったです。

[**Acs-2**] ２つの力学系が出てきています。$(\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}, \tau_1)$,$(\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}, \tau_2)$ $\tau_1(n) := n + 1 \mathrm{mod} 13$, $\tau_2(n) := n^2 \mathrm{mod} 13$ です。前の方の力学系の周期は１３、後者はこの前に図を書いたものです。

[**Qcs-3**]()$\tau^i x$ の意味がわかりません。

[**Acs-3**] $\tau^i x$ は $\tau(\tau(\tau(\cdots(\tau(x)))\cdots))$($\tau$ が i 個) の略です。

[**Qcs-4**]() グラフを書けとはどういうことですか。やはり、グラフというものがよくわかりません。

(**質問理由**：2page 5.2 の例の演習問題で、$p = 23$ のグラフを書くことは、(周期２２のサイクルと固定点 0 を書いた図がここに書いてある) を書くことですか。それともこれは、単にグラフ表示したにすぎないのですか。)

[**Acs-4**] 数学的対象としてのグラフは (V, E) $(E \subseteq V \times V)$ という対のことです。上の力学系のグラフは $(\{ 0, 1, 2, \cdots, 22 \}, \left\{ (i, 10i \mathrm{mod} 23) \;\middle|\; i = 0, 1, 2, \cdots, 22 \right\})$ です。この「グラフ」を書くというのは、君が書いたような図を書くことです。

[**Qcs-5**]() ２つの離散力学系が共通部分を持っていた時の直和もとなり同士に並べたものになるのですか？

(**質問理由**： ２つの離散力学系で、共通するところがあったときは、その部分を重ね合わせたものにするのですか？)

[**Acs-5**] そうです。集合の直和と同じで 1 と 1 の直和は 1,1' となります。(後半への答え：そういう演算 (張りあわせ) も別にありますが、この講義では扱いません。

2000.12.13

２０００年度後期　数理の世界 第９回
学部：　　学科：
学籍番号：　　氏名：
質問：
質問理由：

アンケート

次の表にチェックしてください.

1： 良く知っている　2：知らなかった 3：よくわかった　4：大体わかった　5：まだよくわからない

用語	1	2	3	4	5
力学系のグラフ	–	–			
力学系のサイクル	–	–			
循環小数の力学系	–	–			
有限力学系の構造定理	–	–			

意見・希望などがあればどうぞ：