2000 後期 数理の世界　第 8 回

思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

目 次

5　有限力学系 **1**

5.1　定義 1

5.2　例 2

A　以前のクラスでの質疑 **3**

B　第 7 回質疑 **3**

5　有限力学系

明確な規則に厳密に従った動作を「機械的な振るまい」ということがある。数学的にこれを表現したものが「有限力学系」である。これは、

- 「状態空間」X（機械の状態の全体）
- 「状態遷移規則」$\tau : X \to X$（状態の変化規則）

によって与えられる。

自然科学は、宇宙はどういう機械かを調べる。ニュートン力学では、質点の「状態」は位置と速度で記述できるので、6 個の実数の組で記述できる。従って状態空間は実 6 次元空間 $X = \mathbf{R}^6$ である。状態遷移は微分方程式で表される。微分方程式は、微小時間での遷移規則を与えるものと考えれば、上の形式の一種と捉えられる。

この節では、力学系という数学的概念装置の中で最も原始的な「有限力学系」を説明しよう。力学系の主要な概念の多くはまずここで粗削りな姿で登場する。

5.1　定義

1. 集合 X と写像 $\tau : X \to X$ の組 (X, τ) を離散力学系と呼ぶ。X を状態空間、X の元を状態、τ を状態遷移関数と呼ぶ。
   X が有限のとき、これを有限力学系という。

[1] URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html
質問提出アドレス:sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp

[2] 研究室：理学部 4 号館 4 0 3 号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

2. 離散力学系 (X, τ) は平面上のグラフとして次のように表示できる：X の元ごとに点を打ち、各 $x \in X$ に対して、x から τx への向きの付いた線分を引く。これは、頂点の出次数がすべて 1 である有向グラフに他ならない。

5.2　例

数論的な力学系

1. $X := \mathbf{Z}/p.\mathbf{Z}, \quad \tau(x) := x^2 (\mathrm{mod}\ p)$.
   図 1 は $p = 11$ の場合のグラフ表示である。

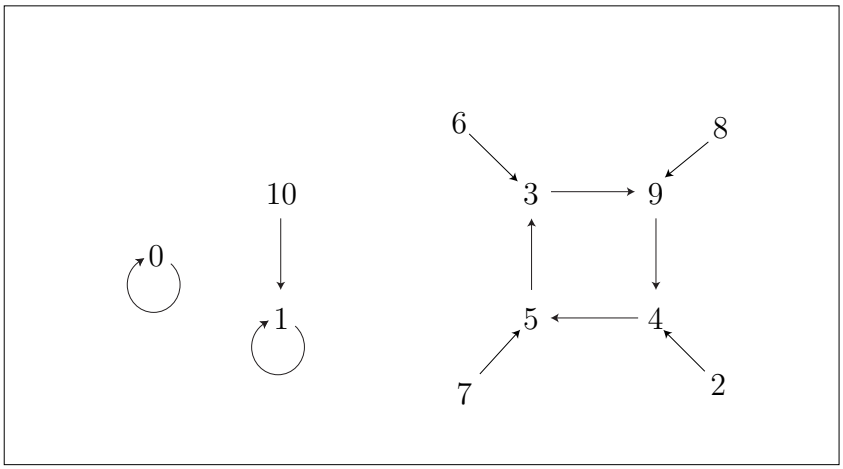

図 1: 有限力学系 $(x \mapsto x^2\ (\mathrm{mod}11))$

循環小数　p を素数, $X_p = \{\ 1, 2, \cdots, p-1\ \}$, τx を $10x$ を p で割った余りとすると、(X_p, τ) は力学系となる。

例：

p	サイクル	循環小数
7	$1 \overset{1}{\to} 3 \overset{4}{\to} 2 \overset{2}{\to} 6 \overset{8}{\to} 4 \overset{5}{\to} 5 \overset{7}{\to} 1$	$1/7 = 0.142857142858\ldots$
13	$1 \overset{0}{\to} 10 \overset{7}{\to} 9 \overset{6}{\to} 12 \overset{9}{\to} 3 \overset{2}{\to} 4 \overset{3}{\to} 1$ $2 \overset{1}{\to} 7 \overset{5}{\to} 5 \overset{3}{\to} 11 \overset{8}{\to} 6 \overset{4}{\to} 8 \overset{6}{\to} 2$	$1/13 = 0.076923076923\ldots$ $2/13 = 0.153846153846\ldots$
17	$1 \overset{0}{\to} 10 \overset{5}{\to} 15 \overset{8}{\to} 14 \overset{8}{\to} 4 \overset{2}{\to} 6 \overset{3}{\to} 9 \overset{5}{\to} 5 \overset{2}{\to}$ $16 \overset{9}{\to} 7 \overset{4}{\to} 2 \overset{1}{\to} 3 \overset{1}{\to} 13 \overset{7}{\to} 11 \overset{6}{\to} 8 \overset{4}{\to} 12 \overset{7}{\to} 1$	$1/17 = 0.0588235294117647\ 05\ldots$

[問 **26**] $p = 23, 29, 31$ に対するグラフを書け。

Collaz の問題.　数 n が偶数のとき 2 でわり、奇数の時は 3 倍して 1 を加える。どのような自然数から出発してもこの操作を繰り返すとやがて 1 になるか ?(未解決)

A　以前のクラスでの質疑

[**Qcs-1**]()Collaz の問題のようにサイクルがありそうで、パッと思いつかず 1 から書いていくしかないものは、順番に書いていくようなグラフしかないのでしょうか？

[**Acs-1**] Collaz の問題は無限力学系ですので図に書き尽くすことはできません。この問題は未だに未解決です。

[**Qcs-2**]() 有限力学系があるということは、無限力学系もあるのですか？

(**質問理由**：X が有限のとき、有限力学系と定義しましたが、X が無限のときにも、状態遷移規則が設定されているものや、設定してやったりできるものがあると思います。そして、もし無限の力学系があったとして、その性質というのは、有限力学系によって得られた性質を、そのまま適用したりすることができるのかなと思い、質問しました。また、無限の力学系では、新たな性質があるのでしょうか？)

[**Acs-2**] 今研究されているものは大抵無限です。カオス理論の中核をなるのが $[0,1]$(0 以上 1 以下の実数の集合) を状態空間とする力学系 (区間力学系と呼ばれている) です。

B　第 7 回質疑

[**Q7-1**](法学部) マス目の Grundy function と、両方向に行き先がある Grundy Function がよくわかりません。

(**質問理由**：両方向に行き先がある Grundy function がどう成り立っているのかがわかりません。)

[**A7-1**] 頂点 v の行き先が a, b であるとき、$G(a), G(b)$ 以外の数の中で最小のものが $G(v)$ です。たとえば、$G(a), G(b) = 0, 1$ なら $G(v) = 2$, $G(a), G(b) = 0, 2$ ならG(v)=1,G(a),G(b)=1,2ならG(v)=0.

[**Q7-2**](文学部) グランディー関数とは、頂点に番号をつけるための関数なのですね。あと、完全グラフとは何です v か。

[**A7-2**] 完全グラフとは、どの 2 頂点も辺で結ばれている対称グラフです。

　関数はそもそも頂点に番号をつけるものです。グランディー関数は、後手必勝の盤面を見つけるための補助手段である関数です。

[**Q7-3**](法学部)Grundy function のグラフがよくわかりません。

(**質問理由**：もう少し例題を使って説明してほしいです。)

[**A7-3**] きょう、もう少し例をやります。

[**Q7-4**](文学部)Grundy 関数は、実社会では具体的にどのようなかたち、分野で使われているのですか。

(質問理由：興味深い考え方なのですが、その応用の仕方が思い浮かばなかったから。)

[**A7-4**] 残念ながら知りません。Grundy 関数がゼロとなるところが後手不敗である証明で出てくる「コア」は考え方として利用できるものと思います。「実社会で具体的に使われる」数学は極めて限られています。最近は暗号理論に初等的数論も使われますし、金融工学では確率解析の高度な理論が使われています。しかし、この講義では、そういう専門家用の高度な数学ではなく、日常的に現われる非数量的な諸関係に現われる (初等的だが学校では教えない) 数学を中心にしています。それも数学の重要な応用であると私は考えています。残念ながら、そういう応用は応用とは認めない風潮が強まっていますが、日常的諸事象・行為・判断・認識の次元を増やすという「応用」は文化を豊かにするのではないか、と考えています。

[**Q7-5**](法学部)§4.5 で、「グラフ (V, E) の各頂点に重み $G(v) \geq 0$ が与えられて ...」とありますが、「重み」とは何でしょうか。

(質問理由：授業では説明されていないはず。)

[**A7-5**] これは単に数のことですが、数を割り振る状況としては重要度 (重み) を指定する場合が多いので、慣習として、こういう言い方をします。説明なしにそういう言葉を使い、混乱させてしまいました。

[**Q7-6**](文学部) 対称ゲームとそうでないもののちがいがわかりません。

(質問理由：対称ゲームというのがどういう特徴を持つものなのかがよくわからなかったため。)

[**A7-6**] ボードゲームでは「盤面」というものがあります。各盤面において差すことのできる手が、両プレーヤーとも同じものを対称ゲームといいいます。

[**Q7-7**](法学部) 結局 Grundy function の性質があるとなんなのですか。

[**A7-7**] Grundy function が存在するとき、それがゼロとなる頂点は後手不敗な盤面を表します。

[**Q7-8**](法学部) グランディファンクションを使ったゲームのようなものはないのですか。

(質問理由：せっかく知ったのでそれを使ってみたいから。) これはゲームが与えられたとき、その後手不敗盤面を求めるためのもので、これを使ってゲームを考えるわけではありません。質問は、グランディファンクションで後手必勝法が見付かるゲームはあるか、ということではないかと想像しますが、三山崩しは有名な例です。

2000.12.6

２０００年度後期　数理の世界 第８回
学部：　　学科： 学籍番号：　　氏名：
質問：
質問理由：

アンケート

次の表にチェックしてください.

1： 良く知っている　2：知らなかった 3：よくわかった　4：大体わかった　5：まだよくわからない

用語	1	2	3	4	5
ゲームの和	–	–			
Grundy 関数	–	–			
$n \oplus_2 m$ という足し算	–	–			
ニムの必勝法	–	–			
有限力学系	–	–			

意見・希望などがあればどうぞ：