2000 後期 数理の世界　第 7 回

思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

目 次

4　ボードゲームとグラフ (続き) **1**

4.3　先手必勝と後手必勝の関係 1
4.4　対称ゲーム. 2
4.5　Grundy function 2
4.6　Grundy 関数による後手不敗判定 3
4.7　ゲームの和 3
4.8　定理 (和ゲームの Grundy 関数) 3
4.9　３山崩しの後手必勝判定 4
4.10 石取りゲームの変種 4

A　第 6 回質疑 **5**

参考書

- 山崎洋平 :「組み合わせゲームの裏表」(シュプリンガー・フェアラーク１９８９)

4　ボードゲームとグラフ (続き)

4.3　先手必勝と後手必勝の関係

簡単な場合　単純に考えるために最初に、P,Q がこの順に 1 回ずつ指すゲームを考える。終った場面が P にとって勝・負・いずれでもないとする。P の手を p, Q の手を q とすると、結果を表す関数を $R(p,q) = 0, 1, -1$ とする ($1, -1, 0$ は各々、P の勝・負・引分を表す。)

先手必勝 $\exists p\, \forall q\, [\, R(p,q) = 1\,]$.

後手必勝 $\forall p\, \exists q\, [\, R(p,q) = -1\,]\,)$.

最初の論理式の否定は

$$\forall p\, \exists q\, [\, R(p,q) \neq 1\,]$$

[1] URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html
質問提出アドレス:sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp

[2] 研究室：理学部４号館４０３号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

すなわち

$$\forall p\ \exists q\ [\ R(p,q)=0 \text{ または } R(p,q)=-1\ ].$$

これは、「後手不敗」というべきものである。後手必勝ならばもちろん後手不敗である。同じように「先手不敗」も定義できる。

一般の場合　一般の場合も上の話しに帰着して考えることができる。この場合には、手の替りに「戦略」を考える。プレーヤー P の戦略とは、ゲームの進行に応じて次になにをするかを決める規則 σ_P である。従って各 n ごとに、それまでの指手 $p_1,q_1,p_2,q_2,\ldots,p_n,q_n$ に応じて次の手 $\sigma_P(p_1,q_1,p_2,q_2,\ldots,p_n,q_n)$ を与える。同様に、プレーヤー Q の戦略 σ_Q も定義できる。両プレーヤーが戦略を決めるとゲームの進行は確定し、結果が勝・負・引分のいずれかになる (ゲームが終らないときは引き分けとする)。

従って、どのようなゲームについても、先手必勝か後手不敗であり、また、後手必勝か先手不敗である。

4.4　対称ゲーム.

有向グラフ $\Gamma=(V,E)$ から次のようなゲームを作ることができる：

- bipartite graph $(V+V', \left\{\ (v,w')\ \middle|\ v\to w\ \right\}\cup\left\{\ (v',w)\ \middle|\ v\to w\ \right\})$,
- $L_0:=\left\{\ v\ \middle|\ v \text{ の outdegree は } 0\ \right\}$,
- $L_0':=\left\{\ v'\ \middle|\ v' \text{ の outdegree は } 0\ \right\}$.

このようなゲームを対称ゲームという。以下、有向グラフは対称ゲームと考えることにしよう。

例.

- $\mathcal{N}=(\mathbf{N},\left\{\ (m,n)\ \middle|\ m>n\ \right\})$ は、1 回に何個でもとってもよい一山くずしのゲームとなる。ここで、$\mathbf{N}=\{\ 0,1,2,3,4,\cdots\}$ は非負整数の全体の集合。
- $\mathcal{N}_3=(\mathbf{N},\left\{\ (m,n)\ \middle|\ m>n\geq m-3\ \right\}$ は前回の一山くずしゲームとなる。

4.5　Grundy function

グラフ (V,E) の各頂点に重み $G(v)\geq 0$ が与えられていて次の性質を持つとする：

$$G(v)=\min\left(\mathbf{N}\setminus\left\{\ G(w)\ \middle|\ v\to w\ \right\}\right)\quad \forall v\in V$$

このとき G のことを、(V,E) の Grundy function という。outdegree が 0 である頂点 v については $G(v)=0$ となることは定義より明らか。

例

- 完全グラフ K_n では、各頂点に $0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$ を付ければよい (この例から Grundy 関数は唯一つとは限らないことがわかる)。
- $\mathcal{N}$ については、$G(n) := n$ が唯一の Grundy 関数となる。
- $a \to b \to c \to a$ というグラフには Grundy 関数はない。

4.6 Grundy 関数による後手不敗判定

G が有向グラフ Γ の上の Grundy 関数 G であるとき

$$C := \left\{ v \;\middle|\; G(v) = 0) \right\}$$

は、後手不敗の盤面の全体となる。

証明の概略. C は core となる、すなわち、

- $v \in C$ ならば $\mathrm{Child}(v) \cap C = \emptyset$,
- $v \notin C$ ならば $\mathrm{Child}(v) \cap C \neq \emptyset$.

このとき、C の中に居れば後手不敗、C の外に居れば先手不敗なことは明かである。

4.7 ゲームの和

2 つの対称ゲーム Γ_1, Γ_2 の和ゲーム $\Gamma_1 + \Gamma_2 := (V_1 \times V_2, E')$ は次のようなもの：

$$E' := \left\{ ((v_1, v_2), (w_1, v_2) \;\middle|\; v_1 \to w_1 \right\} \bigcup \left\{ ((v_1, v_2), (v_1, w_2) \;\middle|\; v_2 \to w_2 \right\}.$$

つまり、2 つのゲームを平行して行なうが、各手番でどちらか好きな方を指すというものである。

例　$\mathcal{N} + \mathcal{N}$ は 2 山くずし、$\mathcal{N} + \mathcal{N} + \mathcal{N}$ は 3 山くずしとなる。

4.8 定理 (和ゲームの Grundy 関数)

G_i $(i = 1,\ 2)$ が各々 Γ_i の Grundy 関数であるとする。このとき、

$$G(v_1, v_2) := G_1(v_1) \oplus_2 G_2(v_2)$$

は、$\Gamma_1 + \Gamma_2$ の Grundy 関数となる、ただし、$n = \sum_i n_i 2^i$, $m = \sum_i m_i 2^i$ $(n_i, m_i = 0, 1)$ と 2 進展開したとき、

$$n \oplus_2 m = \sum_i 2^i (n_i \oplus_2 m_i),$$

ただし、演算 $\oplus_2 : \{\, 0, 1 \,\} \times \{\, 0, 1 \,\} \to \{\, 0, 1 \,\}$ は次の表で定義される：

$\oplus_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

性質

1. $n \oplus_2 n = 0$,
2. (対称性) $m \oplus_2 n = n \oplus_2 m$,
3. (結合律) $(\ell \oplus_2 m) \oplus_2 n = \ell \oplus_2 (m \oplus_2 n)$,
4. $(m \oplus_2 n) \oplus_2 n = m$,
5. $(m_1 \oplus_2 m_2) \oplus_2 n < (m_1 \oplus_2 m_2)$ ならば $m_i \oplus_2 n < m_i$ が $i = 1, 2$ のいずれかについて成り立つ。
6. $\ell := m_1 \oplus_2 m_2 \oplus_2 \cdots \oplus_2 m_k$ ならば、ある $i \le k$ について、$m_i \oplus_2 \ell < m_i$.

[問 **26**] 次を計算せよ。また、結果が 0 でないときは、どちらかの数を減らして 0 にせよ。

$$2 \oplus_2 3 =$$
$$3 \oplus_2 5 =$$
$$11 \oplus_2 23 =$$
$$16 \oplus_2 27 =$$

4.9　3 山崩しの後手必勝判定

$$(\ell, n, m) \text{ が後手必勝} \iff \ell \oplus_2 n \oplus_2 m = 0.$$

例　$5 \oplus_2 9 \oplus_2 11 = 7$ なので先手必勝。以下 $\Longrightarrow$ は先手の手。

5	101
9	1001
11	1011
	0111

$\Longrightarrow$

2	10
9	1001
11	1011
	0000

$\longrightarrow$

2	10
9	1001
7	111
	1100

$\Longrightarrow$

2	10
5	101
7	111
	0000

$\longrightarrow$

2	10
1	1
7	111
	0100

$\Longrightarrow$

2	10
1	1
3	11
	0000

$\longrightarrow$

2	10
1	1
2	10
	0001

$\Longrightarrow$

2	10
0	0
2	10
	0000

このあとは 2 山崩しになる。

[問 **27**] 2 山崩しで、各山からとれる個数を 1 ~ 3 個とした場合は Grundy 関数はどうなるか？

[問 **28**] 3 山崩しで、各山からとれる個数を 1 ~ 3 個とした場合は Grundy 関数はどうなるか？

4.10　石取りゲームの変種

チャヌシッツィ．　2 つの石の山があり、各プレイヤーはいずれかの山から任意個数、あるいは双方の山から同数の石を取り除く。

[問 **29**] このゲームの Grundy 関数を調べよ。

佐藤のマヤゲーム． いくつかの山にどの 2 つも互いに異なる個数の石があり、各プレイヤーはどれかの山から石を取る。その結果が他の山と同数個にならなければいくつ取ってもよい。

[問 **30**] このゲームの Grundy 関数を調べよ。

シャノンのゲーム． 対称なグラフ Γ に対して、2 プレイヤー S, C が交互に辺を取る。与えられた 2 頂点 I, O を S がつないぐことができれば S の勝ち、そうでなければ C の勝ち。

A　第 6 回質疑

[**Q6-1**](法学部) ボードゲームをグラフで表現することによって何か法則とかがみつかるのですか。

(質問理由：ただ場合わけを考えただけなのかと感じたから)

[**A6-1**] 場合分けの作業をした後に、ゲームの構造を分析することができます。先手必勝などの概念の性質がその例です。

[**Q6-2**](法学部) 先手必勝法と後手必勝法を同時に行なったらどっちが勝つのですか。

(質問理由：先手必勝法・後手必勝法という言葉が矛盾するように思えたから)

[**A6-2**] 今日説明しますが、先手必勝と後手必勝は両立しません。

[**Q6-3-1**](文学部)(1)$\bigcup_{i=0}^{\infty}$ 勝$_i(P)$ の $\bigcup$ の意味がわかりません

(2) 先手必勝でなければ、それは後手必勝ということなのですか？

(質問理由：先手必勝という概念の説明が今少し理解できなかったため)

[**Q6-3-2**](法学部)$\bigcup_{i=0}^{\infty}$ の意味を詳しく教えてください。

(質問理由：高校で習った数列の Σ に似ているが、よくわからない。又、∞ の概念もよくわからないので。)

[**A6-3**] 先手必勝などについては今日説明します。$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ は A_i 全部の合併です。

$$A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \cdots$$

と書いた方がわかりやすいかもしれません。

[**Q6-4**](法学部) ○ × ゲームにも先手必勝・後手必勝の法則があるのでしょうか

(質問理由：法学部) 感覚的にはわかるが、論理的に知りたいため。

[**A6-4**] tic tac toe では、先手不敗かつ後手不敗です。つまり、いずれも最善の手を指すと引き分けになります。

[**Q6-5**](文学部) 将棋で、先手必勝か後手必勝か分かる日が来てしまうのでしょうか。

[**A6-5**] それが「分かる」としても理念的な証明に依存するもので、「実際に」それを指すことは出来ないので、余りたいした影響はないと思います。

[**Q6-6**](文学部) もう少し単純な必勝の手の考え方などはあるのかどうか。

(質問理由：複雑でわかりにくいため)

[**A6-6**] きょうの講義で少し詳しく説明します。

[**Q6-7**](歯学部) 先生は 4.2 において、P で勝つ場合を求めるとき、Q が負けた所 (負$_0(Q)$) から考えるといったが、そこからは根性で (とくに公式とか用いずに図をかいて地道に求めるということ) で求めるしかないのですか？

[**A6-7**] Grundy 関数は根性ではなく求める方法の一つです。

[**Q6-8**](法学部)「手」がどの程度であれば先手必勝・後手必勝かわかるのですか。山崩しゲームなら先手必勝・後手必勝が判断できそうだが、将棋は先手・後手が無関係に思えたから

[**A6-8**] わかりません。先手必勝であることを一般論として証明できる場合がありますが、実際に必勝法が見付かるかどうかは別問題です。

2000.11.29

２０００年度後期　数理の世界 第７回
学部：　　学科：
学籍番号：　　氏名：
質問：
質問理由：

アンケート

次の表にチェックしてください.

1： 良く知っている　2：知らなかった 3：よくわかった　4：大体わかった　5：まだよくわからない

用語	1	2	3	4	5
対称ゲーム	–	–			
ゲームの和	–	–			
Grundy 関数	–	–			
$n \oplus_2 m$ という足し算	–	–			
ニムの必勝法	–	–			

意見・希望などがあればどうぞ：