2000 後期 数理の世界　第 6 回

思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

目 次

4　ボードゲームとグラフ　1

4.1　ボードゲームのグラフによる記述 1

4.2　先手必勝・後手必勝 2

4　ボードゲームとグラフ

[問 **20**] 一山崩しゲーム：石の山がある。二人が交互に 1 ~ 3 個の石を取り去る。手番で取る石がない時、負けとする。石の個数によって、先手必勝である場合と後手必勝である場合とがある。先手必勝となる個数と必勝法を考えよ。

[問 **21**] 二山崩しゲーム：石の山が二つある。二人が交互に石を 1 個以上一つの山から取り去る。手番で取る石がない時、負けとする。この場合も、最初の石の状態によって先手必勝である場合と後手必勝である場合とがある。先手必勝となる状態は何か？先手必勝のときの必勝法を考えよ。

[問 **22**] ニム (三山崩しゲーム): 石の山が三つあり、二人が交互に石を 1 個以上一つの山から取り去る。手番で取る石がない時、負けとする。この場合も、最初の石の状態によって先手必勝である場合と後手必勝である場合とがある。先手必勝となる状態と必勝法を考えよ。

4.1　ボードゲームのグラフによる記述

2 名 P, Q が、石取りゲーム・チェス・将棋などのボードゲームを行なうとする。そのとき、ゲームの展開を次のような二部グラフを用いて記述できる。

S をボードの配置の全体とする。たとえば、10 個から始まる一山崩しゲームであれば、

$$S = \{\, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \,\}.$$

また、将棋であれば、将棋盤上に駒を配置する仕方の中で規則で許されているものの全体。

1. 頂点は (s, x) $(s \in S,\, x = P, Q)$.

[1] URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html
質問提出アドレス:sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp

[2] 研究室：理学部４号館４０３号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

2. $(s,x) \rightarrow (t,x')$ $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ 盤面 s で x が指して盤面 t にすることができる。$(P'=Q, Q'=P)$.
3. P,Q が負けた盤面の指定。

4.2　先手必勝・後手必勝

さて、Q が負けの盤面 (将棋で言えば、Q の王様がない状態) の全体を 負$_0(Q)$ とする。

プレーヤー Q が負けの盤面に持っていくことができる盤面は、P にとっては勝ちの盤面である。その全体を 勝$_0(P)$ とする。集合論的には

$$\text{勝}_0(P) := \left\{ s \;\middle|\; t \in \text{負}_0(Q) \text{ となる手 } s \rightarrow t \text{ がある。} \right\}.$$

次に、どのような手を Q が指しても P が勝つ盤面になってしまう盤面を 負$_0(Q)$ に追加したものを 負$_1(Q)$ とする。これは 1 手以内で Q が必ず負ける盤面である。集合論的には

$$\text{負}_1(Q) = \text{負}_0(Q) \bigcup \left\{ s \;\middle|\; \text{どの手 } s \rightarrow t \text{ についても } t \in \text{負}_0(Q) \right\}.$$

以下同様にして

$$\text{負}_0(Q) \subseteq \text{負}_1(Q) \subseteq \text{負}_2(Q) \subseteq \ldots$$

$$\text{勝}_0(P) \subseteq \text{勝}_1(P) \subseteq \text{勝}_2(P) \subseteq \ldots$$

を定義する。

$$\text{勝}\ (P) := \bigcup_{i=0}^{\infty} \text{勝}_i(P),$$

$$\text{負}\ (Q) := \bigcup_{i=0}^{\infty} \text{負}_i(Q)$$

とおく。勝 (P) に属す盤面は、以下 P が適切な手を選べば Q がどのような手を打とうが P は勝てる盤面、すなわち P 必勝の盤面である。

以上のことを P,Q を入れ替えて 負 (P) を定義する。このとき、

定理 4.1

$$\text{負}\ (P) \bigcap \text{勝}\ (P) = \emptyset.$$

[問 **23**] 1 山石取りゲームのルールを「 1 個 ~ 4 個とれる 」としたとき、先手必勝であるための条件を求めよ。

[問 **24**] 1 山石取りゲームのルールを「 1 個、 3 個、 4 個とれる 」としたとき、先手必勝であるための条件を求めよ。

[問 **25**] 2 山石取りゲームのルールで、一回でとれる石数に「 1 個 ~ 3 個 」という制限を付けた場合の先手必勝である条件を求めよ。

2000.11.22

２０００年度後期　数理の世界 第６回
学部：　　学科：
学籍番号：　　氏名：
質問：
質問理由：

アンケート

次の表にチェックしてください.

1： 良く知っている　2：知らなかった 3：講義でよくわかった　4：講義で大体わかった　5：まだよくわからない

用語	1	2	3	4	5
石取りゲーム			–	–	–
ボードゲームをグラフで表現	–	–			
先手必勝という概念	–	–			
先手必勝盤面の求め方	–	–			

意見・希望などがあればどうぞ：