2000 後期 数理の世界　第 5 回
思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

目 次

1　有向グラフ (続き) **1**
1.14 練習問題 1

3　2 部グラフ (続き) **2**
3.1　筋交効果判定法 2
3.2　自由度の考え方 2
3.3　筋交効果判定法の検証 2

A　第 4 回質疑 **3**

1　有向グラフ (続き)

1.14　練習問題

[問 **18**] チェス盤上で、ナイトを動かして升目をすべて通るようにせよ。

1. 盤のサイズが 4×4 の場合を考えよ。
2. 盤のサイズが 4×5 の場合を考えよ。
3. 盤のサイズが $n \times n$ の場合を考えよ。

[問 **19**] sliding game. 例：図 1

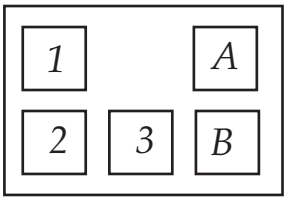

図 1: スライディングパズル：A, B の位置を入れ替えよ

[1] URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html
質問提出アドレス:sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp

[2] 研究室：理学部 4 号館 4 0 3 号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

3　2 部グラフ (続き)

3.1　筋交効果判定法

p4-4 図 1 の場合、次のような 2 部グラフを考える。

- 頂点は $\{ a, b, c, d, 1, 2, 3, 4 \}$
- 頂点を升目 (x, i) に筋交があるときに、x と i を結ぶ。

このグラフが連結 $\Longleftrightarrow$ 構造体が変形しない

以下、この判定法がどうして正しいのかを考えよう。

3.2　自由度の考え方

図 2 のような図の自由度とは、$a_1, a_2, \ldots, d_4$ という 16 個の角度の中で勝手に指定できるものの数をいう。一列に 4 個横に並んだもののであれば、４つのひし形は勝手に変形できる。しかし、この下に新しい並びを付加する場合には自由度は一つしか増えない。従って $n \times m$ 個の升目に筋交いを入れない場合には、$n + m - 1$ だけの自由度がある。

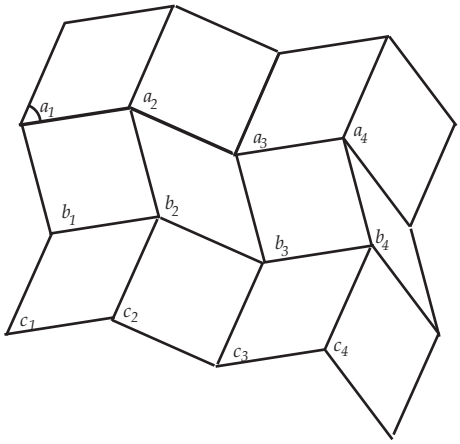

図 2: 筋交のない構造物の変形

3.3　筋交効果判定法の検証

角度の関係式を見てみよう。左上の４つのひし形が共有する点での角度の関係式は

$$\pi - a_1 + a_2 + b_1 + \pi - b_2 = 2\pi.$$

つまり

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1.$$

同様に

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 &= a_2 + b_1 \\ a_2 + b_3 &= a_3 + b_2 \\ a_3 + b_4 &= a_4 + b_3 \\ b_1 + c_2 &= b_2 + c_1 \\ b_2 + c_3 &= b_3 + c_2 \\ b_3 + c_4 &= b_4 + c_3 \end{aligned}$$

これより

$$x_i + y_j = x_j + y_i$$

という関係が出る。ただし、x, y は a, b, c のいずれか、i, j は $1, 2, 3, 4$ のいずれか。

さて、たとえば $(a, 2), (c, 2), (c, 4)$ に筋交を入れると、$a_2 = \pi/2$, $c_2 = \pi/2$, $c_4 = \pi/2$ となる。すると、

$$a_2 + c_4 = a_4 + c_2$$

という関係式より残りの c_2 も直角となることがわかる。従って、図 3 の道 $a \to 2 \to c \to 4$ で到達できる $a \to^* 4$ に対する角度 a_4 も直角となる。

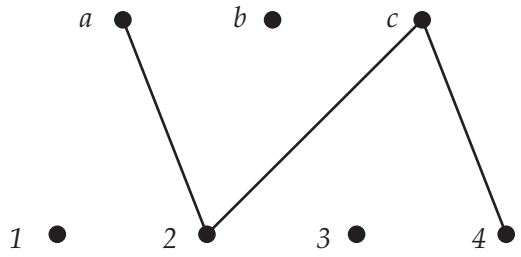

図 3: 3 つの筋交に対応する道

このことから、$a, b, c, 1, 2, 3, 4$ を頂点とし、(x, i) に筋交があるとき x と j を結んでできる 2 部グラフが連結ならば、 すべての角度が直角となることがわかる。逆にそれが連結ではないときは、つながっていない x, i を取ると、升目 (x, i) は歪む可能性が残っていることがわかる。

A　第 4 回質疑

[**Q4-1-a**](法学部) 展張木の話にでてきた「極大」と「最大」の違いがわかりません。

(質問理由：高校の数学の微分で出てくるものを今日の授業に当てはめても理解できないから。)

[**Q4-1-b**](法学部) 極大についてよくわかりません。

(質問理由：極大がどういったものか、どう使われるかわからない。)

[**A4-1**] 高校までは大小関係は数量に関するものでした。どの 2 数 a, b をとっても必ず $a < b$,$a = b$, $a > b$ のいずれかが成立します。しかし、「大小関係」と類似の関係は色々あります。数学でも、集

合 A, B の大小関係として、個数による大小関係の他に、

$$A \leq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B$$

という関係も < 大小関係 > と呼んでもおかしくないものです。ただ、この大小関係が、数の大小関係と違うところは、$A < B, A = B, A > B$ のいずれでもない場合があることです。例えば $\{ 1, 2 \}, \{ 2, 3, 4 \}$ など。このような 2 つのものは、考えている大小関係 (数学では順序関係、partial order という) で比較不能といいます。比較不能な場合があるような大小関係では「一番大きい」という性質 (最大) と、「それ以上大きなものはない」という性質 (極大) は、同じではありません。一番大きいものは以上に大きなものはありませんが、それ以上大きなものはなくとも一番大きいものとは限らないのです。

[**Q4-2-a**](歯学部) 図 2 の連結なやつはどれなんですか？

(質問理由：まだ §2.2 がよくわかっていないから。具体的に問題で説明してほしい。)

[**Q4-2-b**](文学部) 強連結であることにはどのような意義があるのか。

(質問理由：単なる連結との差が明確でないので)

[**A4-2**] §2.2 の図 2 では,(B,C,D) が連結ですが、強連結なものは (C,D) だけです。連結性は辺の向きを無視して頂点間を移動するとき、どこからどこへも行けることを意味しますが、強連結性は、辺の向きを尊重しながら頂点間を移動しても、どこからどこへも行けることを意味します。どの辺も両方向に移動できる対称グラフでは、両者の意味は同じです。

[**Q4-3-a**](法学部) 無向木グラフの定理がよくわかりません。

(質問理由：サーキットがよくわからないので)

[**Q4-3-b**](文学部) サーキットとサイクルとループの違いがわかりません。

(質問理由：一つの点に戻ってくるというのは同じなのにどこがちがうのかわからないから。)

[**A4-3**] ある点から出発し、辺の向きを無視して頂点を無意味な動作はなしに移動し元に戻るものをサーキットと言います。ただし、無意味な動作とは $a \to b \to a$ という動きです。それに対し、サイクルは、ある点から出発し、辺の向きを尊重して頂点を移動し元に戻る道のことです。このときは $a \to b \to a$ もサイクルと考えます。ループは $a \to a$ という辺です。

[**Q4-4**](法学部)3-3D は有向グラフですか、対称グラフですか。あるいは日常に多く見られるであろう「例外」というやつですか？

(質問理由：冒頭の講義でふと疑問に感じたから)

[**A4-4**] 有向グラフです。両方向に向きがあるとき向きを省略して表示することにしています。

[**Q4-5**](法学部) 橋についての説明と 2 部グラフのやり方についてもう一度お願いします

(質問理由：いまいち理解できてないから)

[**A4-5**] ある辺が橋であるとは、その辺を取り除くとグラフが連結ではなくなることです。 2 部グラフのことはきょう詳しく説明します。

[**Q4-6**](文学部) 展長木っていうのをもとめて何か意味があるんでしょうか。

(質問理由：展長木を求めるわけが今イチピンとこなかったから)

[**A4-6**] 展長木は連結性を保たない範囲で出きるだけ辺を省いて得られるものが展長木です。いま政府が熱心な「スリム化」を辺について行なったものです。

[**Q4-7**](文学部)§2.4 の証明がまだよくわかりません。

(質問理由：プリントを読んでみましたがいまいち理解できなかったから。)

[**A4-7**] きょう説明します。

2000.11.8

２０００年度後期　数理の世界 第５回
学部：　　学科： 学籍番号：　　氏名：
質問：
質問理由：

アンケート

次の表にチェックしてください.

1： 良く知っている　2：知らなかった 3：講義でよくわかった　4：講義で大体わかった　5：まだよくわからない

用語	1	2	3	4	5
一方通行化法の正しさの証明	–	–			
筋交効果判定法	–	–			
自由度					
筋交効果判定法の検証	–	–			

意見・希望などがあればどうぞ：