2000 後期 数理の世界　第 4 回
思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

目 次

2　木グラフ (続き) **1**
2.8　木の表示法 1
2.8.1　木の図示法 1
2.8.2　木の頂点の標準的ラベル付け 2
2.9　§2.4 の主張の証明 2
2.10 木の基本的性質 3

3　2 部グラフ **4**

A　第 3 回質疑 **5**

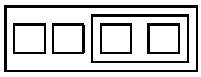
2　木グラフ (続き)

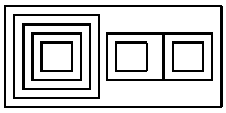
2.8　木の表示法

2.8.1　木の図示法

樹状図

入れ子図　• 箱の平面配置図





• 区間の直線配置

記号表示　• Spencer-Brown 式

• 括弧式 (リスト) 表示

[問 **16**] 次の記号表示から樹状図を描け。

1. ((• • (•))(••)(•))
2. (((((••)•)•)•)•)

[1]URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html
質問提出アドレス:sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp

[2]研究室：理学部 4 号館 4 0 3 号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

2.8.2　木の頂点の標準的ラベル付け

各頂点の子の数は有限であるような木 (これを有限分岐木という) に対して、各頂点に数のリストを次のように対応つけることができる。

1. まず、各頂点の子に 1 から通し番号付ける。
2. 根には空リスト [] を対応させる。
3. $[n_1, \cdots, n_k]$ というラベルのついた頂点の m 番目の子には $[n_1, \cdots, n_k, m]$ というラベルと付ける。

2.9　§2.4 の主張の証明

この証明は意外と面倒である。講義では省略するが、自分で読んでみてください。

証明には次の補題を使う。

補題 **2.1** *depth-first-search* で構成された木グラフを T とし、構成時につけられた番号で頂点をあらわすとき、次の性質がなりたつ。

(i) w が v の子孫ならば $w > v$ (s から g へ道があるとき、s を g の子孫という。) .

(ii) どの頂点についても、その子孫の全体の番号は通し番号になっている。

(iii) p の子孫 a と、p の子孫ではない x が、もとのグラフの辺の端点ならば、$x < p$ である。

証明. (i) は番号の付け方からあきらか。

(ii) と (iii) の証明:頂点 p を任意に一つとる。p の子孫のあいつづく列を $p+1, p+2, \cdots, r$ とし、$r+1$ は p の子孫ではないとする。r の次に行う depth-first-search の作業は、他の選択肢の残っている頂点の中で番号が一番大きなもの q に戻り、他の選択肢である辺 (すなわちもとのグラフの辺でまだ向きをつけてないもの) の一つを選び、その辺の他の端点に $r+1$ という番号をつける。したがって、$r+1$ は q の子となる。さて、もしも $q > p$ ならば、$r > q$ だから仮定から q は p の子孫、従って、$r+1$ は p の子孫となり矛盾。ゆえに、$q < p$ である。

$r+1$ のあとの depth-first-search において、p の子孫が現れることはない。というのは、もしも $r+1$ 以後の頂点 t と p-子孫 s が未処理辺によって繋がっていたとすると、$r+1$ に達する以前に t は処理されていなければなかったはずだから。

以上により、$t > r$ ならば t は p の子孫ではないことがわかり (ii) が示された。同時に、頂点 a が p の子孫、x は p の子孫ではなく、$\{ a, x \}$ がもとの辺とする。このとき $x < p$ でなければならないこともわかった。　　証終

定理の証明　さて、任意頂点から、それよりも番号の小さい頂点への道があることを示せば良い。

p を任意の頂点とし p の子孫の全体を $A := \{ p, p+1, \cdots, q \}$ とする。$r \to p$ という T の辺 e が唯ひとつ存在するが、Γ には橋がないという仮定より A の元 a と A^c の元 x を端点とする辺が Γ にはある。すると上の性質より、$x < p$ となる。従って、もとのグラフの鎖 $p - a - x$ で p から、番号の若い x へ戻ることができることがわかる。　　証終

2.10　木の基本的性質

木グラフを対称化したもの (無向木グラフと呼ぶ) はいくつかの著しい性質を持つ。

(1) 単純サーキット[3]をもたない。

(2) 任意の 2 頂点の間に、唯一つの単純な鎖がある。

(3) 頂点の数は辺の数より 1 だけ多い。

(4) 新しい辺を一つでも付け加えると、サーキットができる。

(5) 木の辺を一つでも取り除くと、連結ではなくなる。

定理 2.2 対称グラフが無向木グラフであるための必要かつ十分な条件は、連結であって単純サーキットをもたないものである。

(証明を考えよ。)

このことから「木であるという性質」は、グラフを対称化して得られる無向グラフの性質であることがわかる。単純サーキットを持たない連結無向グラフを木と呼ぶこともある。

なお、木グラフのどの頂点をとってもそれを root とする木になるように、向き付けを変えることができる。

[3]サイクルで、同じ辺を通らないもの

3　2 部グラフ

頂点が 2 種類に分かれていて、辺は異種の間にだけあるようなグラフを 2 部グラフ (bipartite graph) と呼ぶ。第一回のパズルを解くときに描いたグラフは、渡し守が左岸にいるか右岸にいるかで、状態を 2 種類に分けると、2 部グラフとなっていた。次の問題を通して 2 部グラフについて考えよう。

[問 **17**] 次の図の筋交いで、壁は堅固になるか？変形する場合はどのように変形するか？

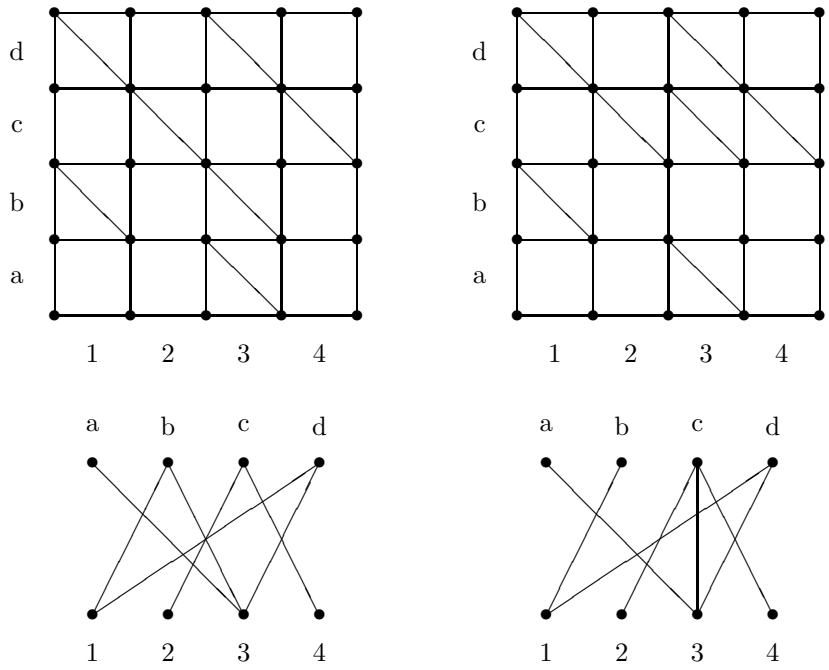


図 1

A　第 3 回質疑

[**Q3-1**](歯学部) 強連結性と連結性の違いがまだよくわからないんですけど。

(質問理由：有向グラフから対称グラフにするとか、それを逆にするとかいっているうちに、頭がゴチャゴチャになったため。もうちょっとわかりやすく、図とかで説明して欲しい)

[**A3-1**] 辺に矢印のないものが対称グラフで、矢印があるものが有向グラフだと考えてください。連結性は辺に向きのないグラフの性質、強連結性は辺に向きのあるグラフの性質、まずと考えてください。

しかし、向きのあるグラフの「連結性」も口にします。各辺の向きをとってできる向きのないグラフが連結のときに、もとの向きのあるグラフは連結である、と言うわけです。

向きのないグラフについても (すべての辺が両方向の向きがついていると考えるとき) 強連結性という言葉が使えますが、それは、連結性と同じ意味になります。

[**Q3-2**](法学部) 強連結と連結の違いがわかりません。対称化が強連結であるとはどういうことですか。

(質問理由：話しを聞いているうちに、内容を整理することができなくなってしまった。)

[**A3-2**] 「対称化が強連結である」は、「対称化して得られるグラフが強連結である」、の略 (酸化と酸化物という言葉と同様に、対称化と対称化物という言葉を使うと明快 :「対称化物が強連結である」)。有向グラフの向きを取って得られるグラフ (これを対称化と呼ぶ) が強連結である、という意味。なお、「対称化」という言葉は、対称化する行為だけでなく、対称化して得られた物も意味する。

[**Q3-3**](法学部) 有限木以外の木グラフはどのようなものでしょうか。

(質問理由：純粋に興味を持ったため。)

[**A3-3**] 頂点を自然数とし、$n \to d \overset{def}{\iff} d$ は n の約数 とすると、頂点が無限のグラフが得られる。

[**Q3-4**](文学部)「対称なグラフが強連結な向き付けが可能」ということが、どうして「連結で橋を持たない」ということと、なぜ同じことなのか〔導かれるのか) がよくわかりません。

(質問理由：説明がよくわからなかったです。$A \Leftrightarrow B$ の "$\Leftrightarrow$" は A ならば B, B ならば A ということでよいのですよね？基本的な記号も忘れてしまってすみません。)

[**A3-4**] 「基本的な記号」というものが決まっているわけではないので、説明を忘れている場合には質問してください。

「対称なグラフが強連結な向き付けが可能」ならば「連結で橋を持たない」ことはすぐにわかりいいあす。しかし逆に、「連結で橋を持たない」ならば「対称なグラフが強連結な向き付けが可能」であることの証明は簡単ではありません。簡単にわかることではないから定理としての価値がある、とも言えます。証明はきょうの資料に書きました。

[**Q3-5**](文学部) 問 6 が自力でどうしてもとけなかったのですが。

[**A3-5**] 問 6 (水差しパズルで、容量を変えたもの) を一般に解くのは難問です。出題の意図は一般的なものを求めたのではなく、$8, 5, 3$ 以外のいくつかの組合わせについて、同じ方法で考えてもらうことでした。

[**Q3-6**](法学部) 問題を解く際に、必要な要素を取捨するのにコツなどはあるのですか？具体的には p1-7 問 7 で、$(3,2), (3,1), (2,1)$ などがなぜ度外視されているのかがわかりませんでした。

(質問理由：講義中は非常にスムーズだったが、いざ、自分が考えてみると、わからなかったから。)

[**A3-6**] $(3,2), (3,1), (2,1)$ を除外したのは、対岸が $(1,2), (1,3), (2,3)$ となって、宣教師の数が人食い族の数より減って危機になるからです。これは、単に、問題の条件を適用しただけで、コツというものではありません。しかし、グラフの描き方には試行錯誤が必要です。講義では、その結果しか書いていませんのでスムーズに見えるのだと思います。「自分で考えてみる」ことが習慣化しているとすれば、素晴らしいことです。

[**Q3-7**](法学部)1-7 ページの問題を、きょう先生がやった以外の方法で、うまいやり方はないのか？
(質問理由：先生のやったようにやろうとすると、途中でゴチャゴチャになって、わからなくなるから。)
[**A3-7**] 実際に手で解いてゴチャゴチャにならずにできる問題は少ないと思います。講義ではグラフを使って問題を解く考え方を理解してもらうために、実際に手でやりましたが、多くの問題はプログラムを書いてコンピュータに計算させるしかないと思います。(水差しパズルのように、何らかの数学的構造が関与している場合には、理論的に解析できることもあります。)

[**Q3-8**](法学部) 強連結を応用したクイズ (p1–7 のような) はないのですか。
(質問理由：強連結 (性の判定) の定理はわかったのでそれを使った問題をやってみたい)
[**A3-8**] 少し探してみます。

[**Q3-9**](法学部) 有向グラフで最短距離を求めるには、有向グラフの表示する方法を変えるか、道を見つけて比べるしか方法がないのですか？
(質問理由：複雑な有向グラフを扱うとき最短距離を見つけることが難しそうなので)
[**A3-9**] 色々な方法が開発されています。「最短経路問題」は「組合わせ最適化問題」を扱う (数学と計算機科学に跨がった) アルゴリズム理論の主要なテーマです。この講義でも後日取り上げる予定です。

[**Q3-10**](法学部) 水差しの問題で、最少回数で解くことを見つけるには、全ての場合を試してみないとできないのでしょうか。
(質問理由：こういう問題は最少回数を答えるのが理想だと思われるし、ものすごい回数になるようだと全て調べるのが大変だから。)
[**A3-10**] 上の回答を見てください。

[**Q3-11**](文学部) 橋の有無の他に、強連結な向き付けが可能かどうかの判別方法はありますか。
(質問理由：とても複雑なグラフの場合、理論上は向き付けが可能だとしても、それを見つけるのは非常に困難に思われるから。)
[**A3-11**] 質問理由にある疑問については、きょうの講義で、向き付けの簡単なやりかたを説明します。
　ご質問自身は「橋の有無をどうやって調べるのか」と問うお積りではないかと思います。複雑なグラフの場合に、橋の有無の判定は簡単ではないかも知れませんが「強連結な向き付けの可能性」を調べることに比べれば格段に容易なことは確かです。

[**Q3-12**](文学部) 木グラフとかはやっぱりコンピュータの発達に伴ってくわしく調べられるようになったんでしょうか。
(質問理由：いかにもそんな感じがしたから)
[**A3-12**] 木グラフ自身は、人類が太古から無意識に親しんできたもので、社会生活の至るところに出会います。それを数学的構造として意識して取り扱い始めたのは、１９世紀の中ごろ (江戸時代末期) で、電気回路についての基本的な論文の中物理学者のキルヒホフ (Gustav Robert Kirckhoff) が用いている。木という名前はケーリーというイギリスの有名な数学者が１８５７年[4]に初めて用いたと言われている。

[4] A. Cayley, On the theory of the analytical forms called trees, Philosophical Magazine (4) 13 (1857), 172–176.

2000.11.1

２０００年度後期　数理の世界 第４回
学部：　　学科： 学籍番号：　　氏名：
質問：
質問理由：

アンケート

次の表にチェックしてください.

1： 良く知っている　2：知らなかった 3：講義でよくわかった　4：講義で大体わかった　5：まだよくわからない

用語	1	2	3	4	5
木の種々の表現法					
サイクルとサーキットの違い					
2部グラフ					

意見・希望などがあればどうぞ：