2000 後期 数理の世界　第 3 回

思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

目 次

1　有向グラフ (続き) **1**
1.13 演習問題 1

2　木グラフ **2**
2.1　一方通行化問題 2
2.2　強連結性 2
2.3　問題の言い換え 3
2.4　解決可能判定法 3
2.5　木グラフ 3
2.5.1　定義 3
2.5.2　実世界に現れる木の例 4
2.6　展張木 5
2.7　一方通行化問題の解法 6

A　第 2 回質疑 **7**

1　有向グラフ (続き)

1.13　演習問題

[問 11] 図 2 のグラフを集合論表示せよ。

[1] URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html
質問提出アドレス:sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp

[2] 研究室：理学部４号館４０３号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

2　木グラフ

有向グラフの中で、木グラフ (tree) と呼ばれているものは、日常的にも、数学的にも重要な役割を果たしている。一方通行化問題という具体的な文脈で、木グラフの基本的なことを学ぼう。

2.1　一方通行化問題

図 1 のような道を持つ町のすべての道を一方通行にして、しかもどの 2 地点の間をも行き来できるようにすることが出来るか？

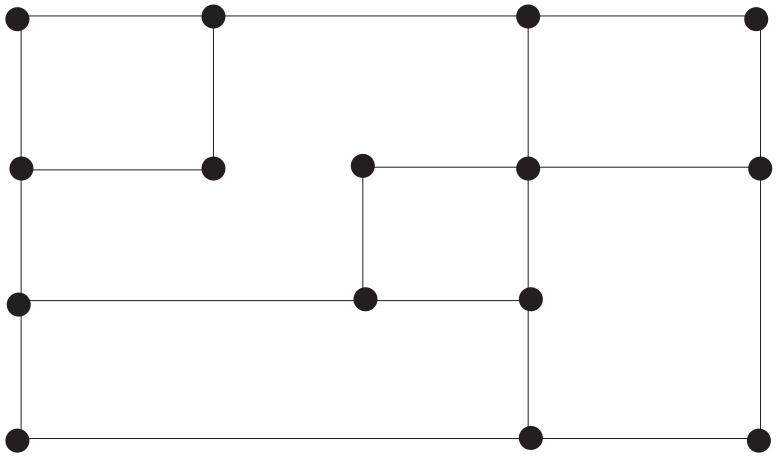


図 1: 一方通行化問題

これを有向グラフの問題として言い換えてみよう。

2.2　強連結性

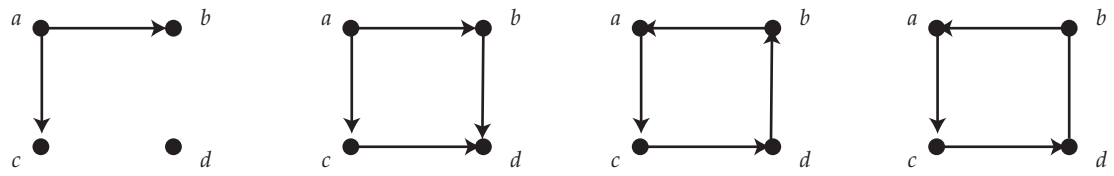
有向グラフ (V, E) が次のような性質を持つとき強連結であるという：どの 2 頂点 p, q についても、、p から q、q から p への道がある。

[問 **12**] 図 2 のグラフの中で強連結なものはどれか？ 有向グラフ (V, E) が「どの 2 頂点 v, w についても $v \to w$ ならば $w \to v$ となっている」とき、対称であるという。対称グラフでは、$v \to w$ かつ $w \to v$ のとき、v, w は隣接しているといい、非順序対 $\{ v, w \}$ を辺という。対称グラフは、頂点を矢印のない辺で結んだ絵として表示する。

有向グラフの辺から矢印を取ると対称グラフになる。この操作を対称化という。この操作を集合論的に記述すると、$(v, w) \in E$ のときに、(w, v) を新たに辺として付け加える、という、操作になっている。

対称化が強連結であるとき、有向グラフは連結であるという。

[問 **13**] 図 2 の中で連結なものはどれか？



(A) □　　(B) □　　(C) □　　(D) □

図 2: 強連結なものはどれか？

2.3 問題の言い換え

§2.1 の問題は次のように言い換えることができる。

連結対称グラフが与えられたとき、各辺に向きをつけて強連結なグラフにせよ。

2.4 解決可能判定法

この問題がとけるための必要かつ十分な条件は、グラフが橋を持たないことである。

ただし、ある辺 e が橋であるとは、その辺を除去すると連結ではなくなることを言う。

橋があるときに強連結な向き付けができないことは明らかであるが、逆に橋がないときには強連結な向き付けを作る方法がある。この方法には木グラフの概念が必要となる。

2.5 木グラフ

2.5.1 定義

次のようなグラフを木グラフ(tree) という：

- 根(root) と呼ばれる入点（つまり出次数がゼロ）があり，
- 根以外の頂点から根への道が丁度一本ある。

ことを言う。

$c \to p$ のとき（つまり、(c,p) が辺のとき）、

頂点 p を頂点 c の親頂点といい

頂点 c を頂点 p の子頂点という。

根以外の頂点には丁度一つの親頂点がある（なぜか？）。子頂点は必ずしも存在しない．子頂点を持たない頂点を葉(leaf) と呼ぶことがある（図 3 の a, b, c など）。

頂点数が有限の木を有限木といい、各頂点の出次数が有限である木を有限分岐木という。この講義では、有限木しか扱わない。

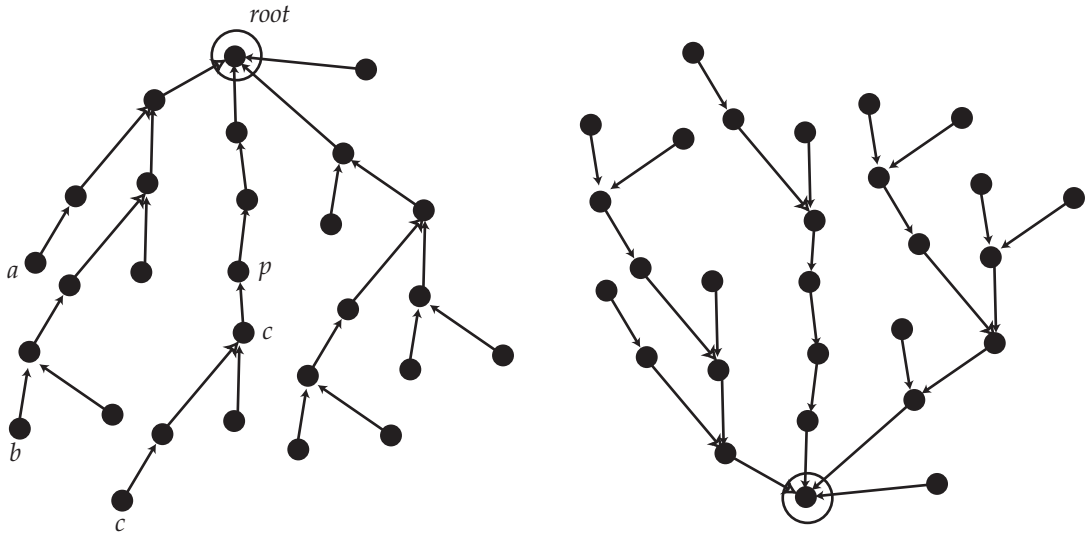


図 3: 木グラフの例

2.5.2　実世界に現れる木の例

[2.5–1] トーナメント (2 分木 (binary tree))
[2.5–2] 生物の系統樹
[2.5–3] 命令系統 [軍隊組織、官僚組織]
[2.5–4] ガスや水道の配管
[2.5–5] 分類システム (住所、コンピュータのファイルシステム、図書分類)
[2.5–6] 数式

2.6　展張木

対称グラフ Γ の展張木(**spanning tree**) とは、その部分グラフであって木であるものの中で極大なものをいう。極大とは、それよりも大きな部分木がないことをいう。

連結対称グラフ (V, E) に対して、次の方法で構成される部分グラフ (V, T) は展張木となる。

展張木の辺集合 T を求める。

[1] まず、p に番号 0 を付ける。$n := 0, T := \emptyset$ とする。
[2] 次を繰り返す：
(a) 無番号の子供を持つ番号付き頂点がない場合：終了。
(b) そうでないとき：無番号の子供を持つ番号付き頂点の中で、番号が最大のもの v をとり、その子供で無番号なもののの一つ w に $n+1$ という番号を付け、$n := n+1$, $T := T \cup \{ (v, w) \}$ とおく。

[問 **14**] 次の対称グラフの展長木を求めよ。

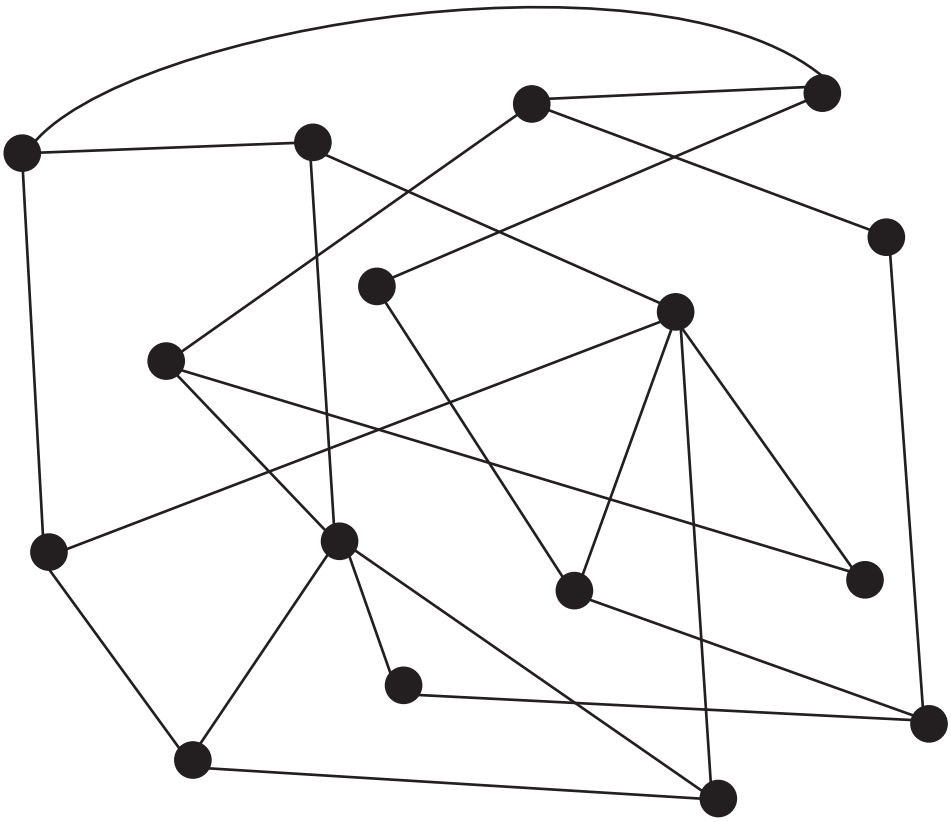


図 4: 練習問題：展長木を一つ求めよ

2.7　一方通行化問題の解法

Γ を橋を持たない連結対称グラフとする。

[1] 上記の方法で、展張木を作る。
[2] 得られた展張木に属する辺には、番号の小さい方から大きい方へ向きをつける。
[3] それ以外の辺は、番号の大きい方から小さい方へ向きをつける。

[問 **15**] この解法を §2.1 に用いよ。

A　第 2 回質疑

[**Q2-1**](文学部) ある頂点からならば全ての頂点を通れる道を探す方法はないか？

(質問理由：パズルでありそうな問題で興味があったから)

[**A2-1**] depth-first-search を行い、到達できなかった頂点があるとすれば、その中に候補があります。そこで、その中から一つ選んで、再び depth-first-search を行なう。こういった作業を繰り返せば、そこからすべての頂点に到達できるような頂点を見つけることができます。

[**Q2-2**](文学部)(a) 有向グラフとはどのように、何のために使われるのか。(b) 有向グラフを使うことによってどのような情報が得られるのか。 (c) depth first search における番号の大きさは何を基準に考えるのか。

(質問理由：前回欠席したから。)

[**A2-2**] (a) 二項関係が有向グラフと見れるので、有向グラフの使い方・目的は数えきれないほどあります。その中からいくつかを選んでこの講義では取り上げています。(b) 有向グラフを使うことにより、関係の全体を視覚的に見渡すことができるという想定で、概念構築ができます。「道」もその例です。(c) 番号は単に、何番目に訪れたかを表すだけです。

[**Q2-3**](法学部)Mathematica はどのようにパズルを解いているのですか？

(質問理由：Mathematica がパズルを解く過程がよくわからなかった。)

[**A2-3**] 質問は (1) プログラムを計算機がどのように実行しているか ?(2) どういうプログラムか？という 2 種類の問いが混ざっています。

(1) は、さらにコンパイラやインタプリタ (人間にとりわかりやすい言語から機械語への翻訳をするプログラム) と、計算機がどのように動作するか、という問いになりますが、この講義の主題から逸れるので割愛します。

(2) これは Mathematica という言語の動作の問いと、アルゴリズムは何か、という問いにわかれます。前者は今は省きます。後者については、前回見せたものは、道があるかどうか一目でわかるようにグラフを描かせる、というものでしたが、簡単な場合にしか機能しないものです。一般には、前回やった道をみつけるアルゴリズムを用いなければなりません。

[**Q2-4**](文学部) 入門書、参考書の類はあるか。

(質問理由：数学は段階をへて積み重ねて行く学問と聞いたが、自分がどの段階から抜けているのかすら解らない状況なので。)

[**A2-4**] 学問としての数学は、数学のすべてではないと思います。素朴な日常的直観とわずかな技術的知識で、自明ではない数学的議論ができる部分もあります。この講義はそういったものを取り上げるつもりです。

参考書は多数あります。一つだけ挙げておきましょう。

- 守屋悦朗「離散数学」(サイエンス社　１９９２年、￥2400)

がこの講義で取り上げるテーマのいくつかをわかりやすく説明しています。

[**Q2-5**](法学部)

(a) $E \subseteq V \times V$ を図で表示するとどういう風になるか。

(b) 1–7 の問題を数学的に解くとどうなるのか。

(質問理由：(a) 黒板の説明がよくわからなかった。(b) 家でやったが数学的にはどうやるのかがわからなかった .)

[**A2-5**] (a) $V \times V$ を xy-平面、E は平面図形という状況で表示できます。

(b) この場合は解けないのですが、まず有向グラフを描き、出発頂点から到着頂点までの道が無いことを、depth-first-search で示せばよいのです。

[**Q2-6**](法学部) 問 8 でやったような、全て求めるといった作業は、数学で考える中でどのような意義があるのか。

(質問理由：実際の場面では、最短経路を見出すのに一番速い方法を見出す方法こそ有益だ。他のものを全て見つけるというローラー作戦方式は、参考以上の学習成果をあげるとは思われない。)

[**A2-6**] 「実際の場面」も色々です。軍事行動のような場合であればその通りですし、規模が大きな問題でもやはり「速さ」が決定的に問題となります。これはアルゴリズム理論という大分野の主題です。

しかし、P からの行き先がその都度異なる課題の場合は、予め、P からどこまでどのように行けるかを調べておくことには「現実的な意義」もある。

[**Q2-7**](文学部) 頂点集合 V と辺集合 E の組 (V, E) で有向グラフが定まるとのことだが、V の頂点は矢印の先なのか後なのか？つまり (a, ab) は $a \to b$ か $b \to a$ か。また、$(a, ab) = (a, ba)$ としていいのか．

(質問理由：V の情報が有向グラフに対してどんな意味を持っているのか書いていないように思えた。)

[**A2-7**] 記号を勘違いしています。一つ一つの辺が (V, E) なのではなく、頂点の一式が V, 辺の一式が E です。従って、辺 ab があるときは、$V = \{\, a, b, \dots \}$, $E = \{\, ab, \dots \}$ となります。

[**Q2-8**](歯学部) これは何の役に立つのか。

(質問理由：そもそも数学は実用性にかけては小学生レベルの知識があれば十分である、度の過ぎた探求は発見者以外には苦痛でしかないと思うのだが。)

[**A2-8**] 詭弁に聞こえるかも知れませんが、「度が過ぎているから苦痛を感じる」のではなく「苦痛を感じるとき、度が過ぎていると言いたくなる」と言うべきでしょう。「算数の実用性」と「数学の実用性」は意味が違います。数学を通して、言葉を正確に使うとはどういうことか、を学ぶことができるのです。現実では数学のように < 言葉を正確に使う > ということ自身の意味が定かではありません。だからこそ、数学という理想的な状況で、それを学ばなければならないのです。しかし、最近の大学カリキュラムでの数学は、数学科以外の学生には必要のない内容を持っているため、正確に言葉を使うことの練習の場になっていない、という欠点があります。この講義では、数学的な内容は易しくして、それを使うという経験の上で、正確に推論し議論するということを学んでもらいたいと思っています。

[**Q2-9**](法学部) 講義の冒頭で行列の話しがあったが、本講義を受講するにあたって、行列の知識は必要か？

(質問理由：文系数学しか習っていないので行列の知識がないから)

[**A2-9**] 全体としては不要です。部分的に必要となることはありますが、そのときは、基本的な考え方と計算法は説明します。

2000.10.25

２０００年度後期　数理の世界 第３回
学部：　　学科：
学籍番号：　　氏名：
質問：
質問理由：

アンケート

次の表にチェックしてください.

1： 良く知っている　2：知らなかった 3：講義でよくわかった　4：講義で大体わかった　5：まだよくわからない

用語	1	2	3	4	5
対称グラフ					
強連結性と連結性の違い					
木グラフ					
展長木					

意見・希望などがあればどうぞ：