2000 後期 数理の世界　第 2 回
思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

目 次

1　有向グラフ (続き) **1**
1.8　問 2 の構造 1
1.9　有向グラフに関する語彙 2
1.10 パズルの数学的な表現 2
1.11 道の見付け方：depth-first-search 2
1.12 問 3 の解答 3

A　第一回質疑 **5**

B　マテマティカのデモ **8**

C　川渡りパズル：Mathematica による解法 **10**

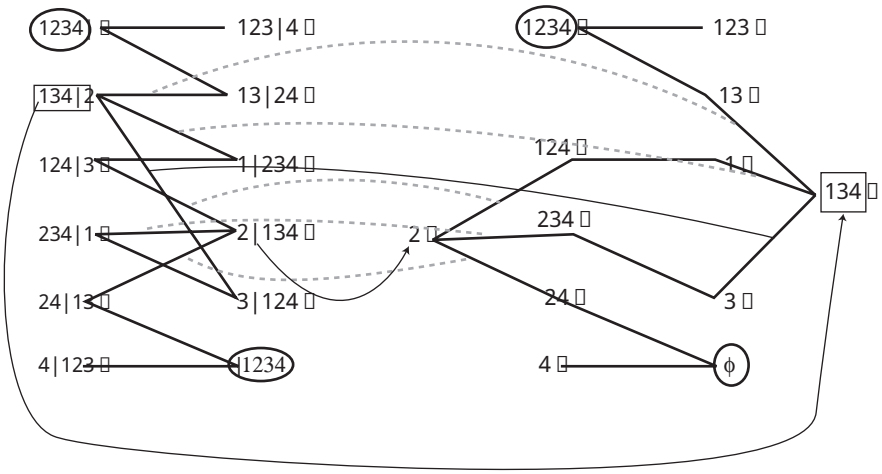
1　有向グラフ (続き)

1.8　問 2 の構造

状態は色々表し方がある。もっとも簡略されたものは左岸に居る者のリストにより状態をあらわす方法である。しかし、右岸の状態も一緒に表した方がわかりやすい。なお、配置は、船頭 (4) がどちら岸にいるかを考慮して配置するとわかりやすい。下の左は $13|24$ で、左岸に $1, 3,$ 右岸に $2, 4$ という状態を表す。右の図では、左岸の状態だけで表示している。

[1]URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html
質問提出アドレス:sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp

[2]研究室：理学部４号館４０３号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/



なお、左の図を右の図に書き直すことで、解答は自明になる。こういった変形も「計算」と考えることができる。

1.9 有向グラフに関する語彙

(V, E) を有向グラフとする。グラフ (V, E) の道とは、辺の列 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ であって、各辺の終点が次の辺の始点となっているもののことをいう。道の始点とは、最初の辺の始点のことをいい、終点とは、最後の辺の終点のことをいう。

例えば、図 1 で、

- (ab, bc, cd) は始点が a 終点が d の道。
- $(ab, be, ef, fg, ge, eh, hi)$ は始点が a 終点が i の道。

道は辿る頂点を順番に書いて表すこともできる。上の 2 つの道はそれぞれ、$(a, b, c, d), (a, b, e, f, g, e, h, i)$ と書くことができる。

[問 **8**] 図 1 のグラフで b から i への道をすべて求めよ。

1.10 パズルの数学的な表現

今扱っている問題は、グラフの言葉でいうと次のように表現できる。

グラフ (V, E) の 2 頂点 α, ω が指定されたとき、α を始点とし、ω を終点とする道を見つけよ。

1.11 道の見付け方：depth-first-search

backtrack 法ともいう。α から先へ先へと進む。すなわち、

重要

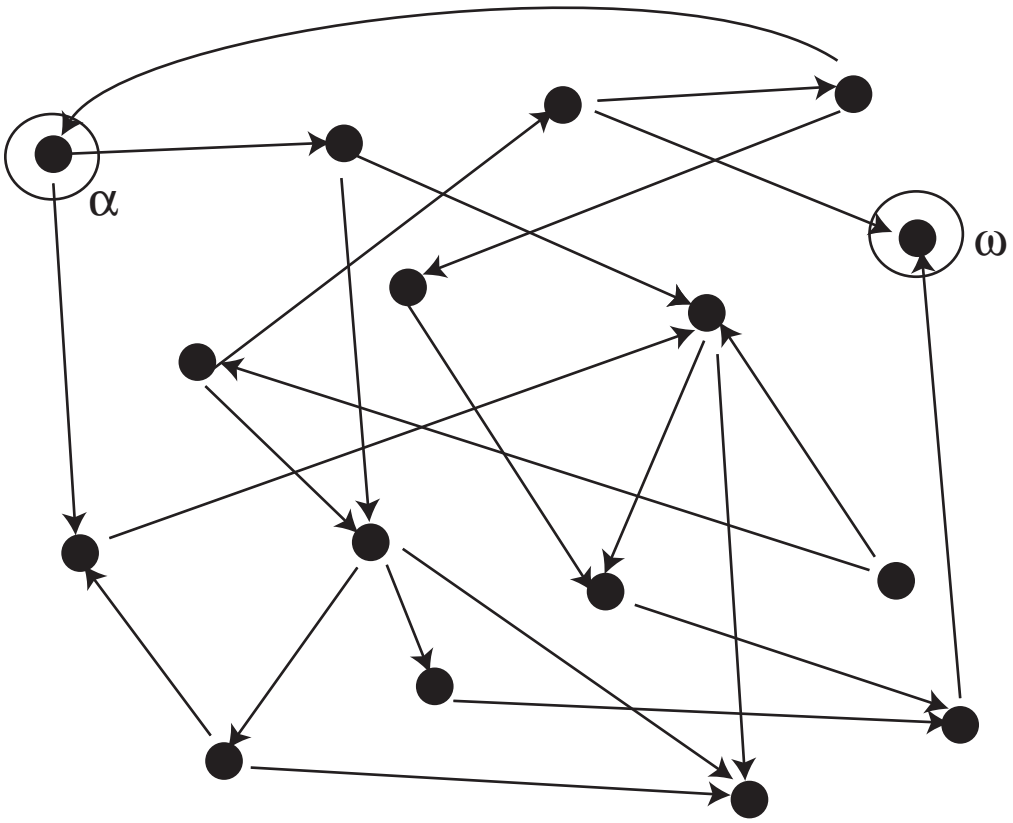
(S-1) まず、α に番号 0 を付ける。$n := 0$ とする。
(S-2) 次を繰り返す：
  (a) 既往頂点 (番号の付いた頂点のこと) から未往頂点 (番号の付いていない頂点) への辺がないときは終了。
  (b) そうでないとき：未往頂点への辺の始点となる既往頂点の中で番号最大のものをとり、その隣接未往頂点の一つを任意に選び 番号 $n+1$ を付けて、$n := n+1$ とおく。
(S-3) 目標頂点 ω が既往頂点ならば、α から ω への道があり、未往頂点ならば α から ω へは道がない。

[問 **9**] 図 1 のグラフについて

- $\alpha = a$
- $\alpha = e$

として上の方法を適用せよ。

[問 **10**] 次のグラフについて depth-first-search を適用せよ。



1.12 問 3 の解答

(S-1) 状態：どれかの各水差しは空かいっぱいでなければならないので、状態は次の通り

800	701	602	503
710			413
620			323
530			233
440			143
350	251	152	053

(S-2) **解答例：**800,503,530,233,251,701,710,413,440

A　第一回質疑

[**Q1-1**](文学部) 有向グラフの情報は、頂点の集合と辺の集合の 2 つから成り立っているということでしたが、ここでなぜ「集合」という言葉がでてくるのかわかりません。「ノーテーション」って何ですか？

(質問理由：「集合」という概念がよくわからない。特に空集合というのは、高校でやらなかったのでもう少し詳しくやってほしい。)

[**A1-1**] 良い質問です。

グラフの定義に「集合」という言葉がでてくるわけについて　「集合」という言葉は、日常的には「集合する」という言い方でしか使うわないので「頂点の集合」という言い方には、頂点が集まってくるというイメージが伴っていて違和感があるのかも知れません。英語では集合は set という言葉を使います。「ひとそろいの人またはもの, セット; 受信機; (よくない) 仲間; (身体の一部の) 様子; 映画のセット, 芝居の舞台装置; (髪の) セット; (テニスの) セット」という意味で、日本語でも一セットという言い方をします。「点の一揃いと辺の一揃い」がグラフだ、という言い方のほうがわかりやすいかもしれません。集合という言葉に違和感がある間は、「一揃い」という言葉に変えてみてください。

「集合」という概念について　ものが集まったとき、その集まり自身が「独自の存在」となる場合があります。社会では、人が集まって種々の団体ができます。これを徹底的に広げたものが数学の「集合」概念です。人が何となく集まった集団は、社会的に認知された団体になるわけではありませんが、数学では、その集団に属する人たちが確定すれば、一つの集合が定義された、と言います。その人たちに共通する性質や特性がなくても集合と考えるわけですから、随分乱暴な話しですが、それが、数学の「集合」という概念です。

notation とは　表す方法 (記法) のことです。数をあらわすノーテーションとしては、十進法や二進法の他に、漢数字によるものや、原始人による石ころの山、などがあります。

[**Q1-2**](法学部) 空集合 $\emptyset$ に 0(ゼロ) は含まれないのですか？それはなぜですか？

(質問理由：0 (ゼロ) はちゃんとした数字を表すのか、何もないということを表すのかどっちなのかわからないからです。もしも後者なら、0 も $\emptyset$ に入るのではないのですか？)

[**A1-2**] 重要な質問です。

数学では 0 は数として扱われます。したがって $\{ 0 \}$ という集合は 0 というモノを要素とする集合になります。

0 は「0 個のリンゴがある」=「リンゴがない」という言い方で意味を説明することはありますが、数学の中では、0 は不可欠な役割を果たす「ちゃっとした数字」になっています。「何もない」ということを本来表していたものがなぜここまで重要な役割を果たしているのか、それは、簡単な答えはないと思います。最近 Robert Kaplan という数学者が"The Nothing That is – A Natural History of Zero"(Oxford Univ Press 2000,ISBN 0-19-512842-7) という面白い本を出版しました。

いずれ翻訳されると思います。

空集合は「何もない集合」という語義矛盾を含むような不可思議なものですが、やはりゼロと同じように数学では重要な役割を果たします。一つの役割は、集合を定義した段階では、それが要素を持つかどうかわからない場合が多いのです。例えば、空集合という言葉を持たなければ、$\left\{ x \;\middle|\; x^9 + x + 1 = 0 \right\}$ と書いたとき、それが集合かどうか (つまり要素を持つかどうか) を議論しなければならないことになります。それは方程式を解くことを意味しますから、解けないときに、思考がそこで止ってしまうことになります。そこで、空集合の可能性も込めて、集合 $\left\{ x \;\middle|\; x^9 + x + 1 = 0 \right\}$ を A と置く、と言って議論が始められることは極めて重要なことなのです。そして、あとで「この集合は空集合か否か？」と問えばよいのです。

[**Q1-3**](文学部) 有向グラフを集合論的に定義できることは分かったのですが、それにどんなメリットがあるのかをもう少し重点的に教えてください。

(質問理由：冒頭の集合論の説明が、後半のパズルの説明にどのように生きてくるのか、そのつながりがはっきりつかめなかったため。)

[**A1-3**] 良い質問です。集合論によるグラフの定義は、パズルの解法と直接にはつながっているわけではありません。しかし、パズルの問題の構造を有向グラフで表示したときに、絵としてのグラフの持っている多くの性質や特性の中で何に着目しているか、ということを明確にすると、集合論で定義したグラフそのものに着目している、ということになるのです。いわば手で書いた三角形と三角形のイデアとの違いに似ています。

[**Q1-4**](文学部) 直積集合はよく使うのですか？

(質問理由：初めてみたから。)

[**A1-4**] 非常によく使います。実は中学の数学でも既に使っているのです。座標平面の点は実数の対 (x, y) として書けましたし、逆に、実数の対 (a, b) があれば、それに対応する点が平面上にあります。この対のことを順序対と呼びました。したがって、平面上の点は直積集合 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ の要素と一対一に対応します。ただし、$\mathbf{R}$ は実数の集合です。

[**Q1-5**](法学部) 部分集合 $\subset$ と $\subseteq$ の違い

(質問理由：よく聞こえなかったので。)

[**A1-5**] $A \subset B$ は A は B とは異なる部分集合であることを意味します– – – と断らなければならないわけは、集合は自分自身の部分集合であるという約束が「部分集合」という言葉についてあるからです。

[**Q1-6**](法学部) 問題の答えの見方がわからなかった

(質問理由：もっと考える時間がほしいから)

[**A1-6**] 少し説明不足でした。左岸の状態だけで全体の状態が決まるので、右岸の状態を省略しているためにわかりにくくなっています。情報を圧縮し操作しやすくすることと、理解しやすくすることとの間にあるトレードオフの一例です。きょうもう一度説明します。

[**Q1-7**](法学部) 問 2 の右のような図が表す意味がよくわかりません。

(質問理由：1234——123 と移る過程で何が起こっているのかわかりません。)

[**A1-7**] 良い質問です。左岸で全員 $1, 2, 3, 4$ がいる状態から、左岸に船頭が居ない状態に変化するのですから、船頭が一人でフェリーを漕いで対岸に行ったことになります。(もっとも、別の状況設定では、$1234 \longrightarrow 123$ では船頭が寝てしまった、ということもあり得ます。)

[**Q1-8**](経済学部) 数学の頂点と辺の関係が、このような形で羊やオオカミの頭の体操にいかせるとは思わなかった。もう少しこのような問題を続けてほしい。

[**A1-8**] 多くの数学的構造や概念はすべて現実の中に隠れているものだ、という見方が可能です。

[**Q1-9**](歯学部) 先生は今日の授業はコンピュータで使えるといったが実際の授業でコンピュータは使わないのか？

(質問理由：コンピュータ関連に興味があるから。)

[**A1-9**] 講義ではコンピュータの画面を投影して、画像などを見てもらうことはあります。

参考までに、Mathematica という言語でパズルを解いてみます。その前に、Mathematica の基本的な使い方を説明しておきます。

B　マテマティカのデモ

(S-1) 電卓としての使い方

(a) 電卓として

- `2+2` とキーインし Enter キーを押す[3]と Out[1]=4 という結果が表示される。(mathematica 起動時には 1 分くらいかかる)。
- かけ算：`2 3`
- べき：`2^100`
- 割算：`12345/15`
- `123/21` の答えは分数であらわされる。
- `N[%]` で上の分数の小数展開が得られる。% は直前の結果をあらわす。
- `N[123/21]` によって上の 2 つの操作が 1 度で行える。
- `N[1/37,100]` により、小数点以下１００位まで表示できる。
- `FactorInteger[1234567]` :1234567 の素因数分解.
- `N[Pi,1000]` :円周率を１０００桁まで表示。

(b) 多項式の四則演算、因数分解

- `(a x + b)(c x + d)` : 多項式の積の入力。このままでは展開しない。
- `Expand[%]` :多項式の展開
- `Factor[%]` :多項式の因数分解。
- `Expand[(1+x)^100]` :べき
- `Factor[%]`

(c) リストの演算

- `a1={1,2,3,4,5}` : 文字 $a1$ の値を{1,2,3,4,5} に。
- `2+ a1` :各成分に $2+\bullet$ を作用.
- `2 a1` :各成分に $2\times\bullet$ を作用.
- `a1^2` :各成分に $\bullet^2$ を作用.
- `a2={1,x,x^2,x^3,x^4}`.
- `a1+a2`
- `a1 a2`
- `a1^a2`

[3]Enter キーを押すと計算を始める

- `Plus @@ a1`:成分の和をとる。
- `Times @@ a1`:成分の積をとる。

C　川渡りパズル：Mathematica による解法

2.8.0 パッケージの読み込み

```
<<  DiscreteMath‘Combinatorica‘
```

2.8.1 状態の数え上げ

左岸に居るもの達（0:人、1:犬、2:羊、3:キャベツ）の集合で状態を記述

2.8.1.1.　安全性を考慮しないで考えた状態の全体

```
全状態集合=Subsets[{0,1,2,3}]
```

2.8.1.2. 人 0 を含まないが{1,2}または{2,3} を含むときは危険である

```
危険 [状態_List]:= Not[MemberQ[状態,0]]
        &&
        (
          (MemberQ[状態,1] && MemberQ[状態,2])
        ||
          (MemberQ[状態,2] && MemberQ[状態,3])
        )
```

2.8.1.3. どの岸も危険な状態であってはいけない

```
安全 [状態_List]:=
        Not[危険 [状態]]
        &&
        Not[危険 [Complement[{0,1,2,3}, 状態]]]
```

2.8.1.4. 安全な状態

```
状態集合=Select[全状態集合, 安全]

{{}, {1}, {0, 1, 2}, {0, 2}, {2}, {0, 2, 3},
 {0, 1, 2, 3}, {1, 3}, {0, 1, 3}, {3}}
```

2.8.2. 移りあえる状態の組の判定

人は船を操作する-->0 の有無が変化する。
船には人以外に 1 だけ移動--> 一方が他方の部分集合で個数の差は 2 個以下

```
Clear[移動可能か]

移動可能か [前状態_List,ato_List]:=
        (*共通部分は 0 を含まない *)
        Not[MemberQ[Intersection[前状態,ato],0]]
        &&
         (*どちらかは 0 を含む *)
        MemberQ[Union[前状態,ato],0]
        &&
        (* 一方が他方の部分集合で個数の差は 2 個以下 *)
         (
                (* 前状態が後状態の部分集合 *)
                (Length[Complement[前状態,ato]]==0
                &&
                Length[ato]-Length[前状態]<=2 )
                ||
                (* 後状態が前状態の部分集合 *)
                (Length[Complement[ato, 前状態]]==0
                &&
                Length[前状態]-Length[ato]<=2 )
        )
```

2.8.3. 遷移グラフの作成

```
遷移グラフ=MakeGraph[状態集合, 移動可能か [#1,#2]&]
ShowLabeledGraph[遷移グラフ]
ShowLabeledGraph@RankedEmbedding[遷移グラフ,{7}]
```

2000.10.18

２０００年度後期　数理の世界 第２回
学部：　　学科：
学籍番号：　　氏名：
質問：
質問理由：

アンケート

次の表にチェックしてください.

１： 良く知っている　２：知らなかった ３：講義でよくわかった　４：講義で大体わかった　５：まだよくわからない

用語	1	2	3	4	5
グラフによるパズルの解き方					
道					
depth-first-search					

意見・希望などがあればどうぞ：

北大理数学 辻下　徹