2000 後期 数理の世界　第１１回

思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

目 次

7　エントロピー と情報量 **1**
7.1　偽銅貨のパズル 1
7.2　エントロピー 1
7.3　観測結果の情報量 2
7.4　実験の情報量 3
7.5　基本定理 3
7.6　パズルの解答の可能性の分析 3
7.7　銅貨が６個の場合 4

7　エントロピー と情報量

「情報」は曖昧さを減少させるが、曖昧さを減少させることが「情報」の本質である。曖昧さ分析と情報の分析とは表裏一体である。その鍵となるのがエントロピー である。

7.1　偽銅貨のパズル

次のパズルを情報量を用いて解こう (ヒンチンの本より)。

> 銅貨が１２枚ある。その中に偽銅貨が一枚だけ混じっている。天秤を使って３回で偽銅貨をみつけるにはどうしたらよいか？ただし、本物の銅貨の重さは皆同じであるが、偽銅貨は本当の銅貨と重さが違う。

7.2　エントロピー

エントロピー の定義　ある状況がどうなっているかについて、n 通りの同等な可能性があるとするとき、その状況 A のエントロピー (あいまいさ) は $\log_2 n$ ビットであるという。

例えば、コイン投げの結果は２通りあるので、そのエントロピー は $\log_2 2 = 1$ ビットである。

[問 **27**] コインを２回投げる結果のエントロピー は何ビットか？

---

[1] URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html
質問提出アドレス:sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp

[2] 研究室：理学部４号館４０３号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

[問 **28**] コインを n 回投げる結果のエントロピー は何ビットか？

7.3　観測結果の情報量

観測 (または実験、問い合わせ、等) によって、状況のエントロピーが減少したとき、その減少分を観測がもたらした情報量 (単に、観測の情報量) という。

例えば、コイン投げを実際に行うと、 1 ビットの曖昧さがなくなるので、コイン投げのもたらす情報量は 1 ビットである。

[問 **29**] サイコロを投げることで得られる情報量は何ビットか？ １０回投げることで得られる情報量は何ビットか ?(ただし、$\log_2 3 \approx 1.58$ を用いてよい。)

トランプのカー ドが一枚伏せてあるとする。このカー ドについて何の手がかりもないときは５３通りの可能性がある。このとき、そのカー ドの持つエントロピー (あいまいさ) の大きさを $\log_2 53 \approx 5.72792$ ビットである。

今、そのカー ドが赤であるということがわかったとすると、カー ドの候補は２６通りに減り、エントロピー は $\log_2 26 \approx 4.70044$ に減る。その差、1.02748 が「カー ドが赤である」という情報の大きさを表す。

[問 **30**] カー ドがスペー ドではないことが予めわかっている場合のエントロピー はいくつか？

このとき「カー ドが赤である」ということがわかるときに得られる情報量はいくつか？[3]

ただし、$\log_2 5 \approx 2.32193$ を用いてよい。

[問 **31**] 隣室でコインが 2 回なげられたとする。結果を問い合わせて回答を得た。

1. 「 1 回目は表、 2 回目は裏」という回答の情報量を求めよ。
2. 「 1 回目と 2 回目の結果は違っていた」という回答の情報量を求めよ。
3. 「裏が出た」という回答の情報量を求めよ。

日常的に使われている情報量

[3] この例から、同じ言葉「カー ドは赤である」でも、それが持つ情報量は、曖昧さの内容によって異なることがわかる。

単位	定義	例	記憶媒体
byte	8 bit	アルファベット１文字	
kilo byte (KB)	1000 byte	原稿用紙一枚	
mega byte (MB)	1000 KB	単行本一冊, カラー写真１枚	２ＨＤフロッピーディスク１枚
giga byte (GB)	1000 MB	６０分映画１本	ＣＤ− ＲＯＭ 5 ~ 6 枚
tera byte (TB)	1000 GB		

7.4　実験の情報量

実験 A の結果の可能性が m 通りあるとする (サイコロ投げでは 6 通りの結果の可能性がある)。さて、実験 A の結果を分類し、分類結果を記録することにしよう (サイコロ投げの場合の例としては、目の数が奇数か偶数かで結果を分類する、などが典型的。)。

さて i 番目の分類 r_i に入る結果が n_i 通りあるとする。結果が r_i であるという情報の情報量は

$$\log_2 n - \log_2 n_i = -\log_2 p_i$$

となる、ただし、$p_i := n_i/n$ とおいた。p_i は結果が r_i となる確率である。

サイコロの結果を奇数 (r_1 と呼ぶ) , 偶数 (r_2 と呼ぶ) で分類する場合には、

$$p_1 = 0.5, \quad p_2 = 0.5$$

であり

$$-\log_1(0.5) = 1.$$

情報量の平均値

$$H((p_1, p_2, \cdots, p_m)) := -\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i$$

を、この実験の情報量という。

上でサイコロの目の奇数か偶数かを調べる実験の情報量は

$$-(0.5\log_2 0.5 + 0.5\log_2 0.5) = 1$$

となる。

7.5　基本定理

$p = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$　に対して、

$$0 \le H(p) \le \log_2 n$$

であり、等号 $H(p) = \log_2 n$ が成り立つのはすべての i について $p_i = 1/n$ となる場合だけである。

(証明は省略する。)

この定理により、実験や問い合わせを効率よくするには結果が等確率になるよう工夫すべきことがわかる[4]。

[4] ２０の扉のようなクイズでの経験からすれば当然のことであろう。

7.6　パズルの解答の可能性の分析

- 偽金がどれかは１２通りの可能性があるので、エントロピーは $\log_2 12 \approx 3.58$.
- 偽銅貨が本物より重いか否かの区別も考慮すると、エントロピー $\log_2 24 \approx 4.58$.
- 1 回の計測のもたらす情報量の最大値は $\log_2 3 \approx 1.58$ である。
- ３回の実験で得られる情報は、最大 $\log_2 27 \approx 4.75 > 4.58$.

以上により、贋銅貨を発見できる可能性がある。要求されてはいないが贋銅貨の敬重もわかる可能性がある。

もしも、銅貨の数が 14 個より多い場合には、3 回の実験では、偽銅貨と軽重の双方まで確定することはできないことがあることがわかる。

偽銅貨が 2 個の場合には、エントロピーは $\log_2 {}_{12}C_2 \approx 6.04$ となるので、最低 $\log_2 66/\log_2 3 \approx 3.81$ 以上の回数の実験をしなければならない。

7.7　銅貨が 6 個の場合

銅貨の個数が 6 個の場合を考える。この場合、偽銅貨の重さについては度外視すれば、エントロピーは $\log_2 6$ なので、二回の実験で偽銅貨を発見できる可能性がある。しかし、実際には３回の実験が必要となる。

1. 記号
   - まず、偽銅貨の番号を x とし、「偽銅貨が重い」という情報を H, 「偽銅貨が軽い」という情報を $\neg H$ で表す。
   - $[i_1 i_2 \cdots i_k | j_1 j_2 \cdots j_k]$ により、左に番号が $i_1, i_2, \cdots i_k$ の銅貨を置き、右に番号が $j_1, j_2, \cdots j_k$ の銅貨を置く実験を表す。
   - 実験の結果を次のように表す。
     - $[>]$:左が重い
     - $[<]$:左が軽い
     - $[=]$:つりあった
2. 最初の実験最初の実験としては $[1|2], [12|34], [123|456]$ の３種類しかない。
   (a) 実験 $[1|2]$ の情報量の計算。
   - $[<]$ の場合
     - $x = 1$ かつ $\neg H$ または、
     - $x = 2$ かつ H

     なので、２通りの場合がある。
   - $[>]$ の場合も二通り。
   - $[=]$ の場合は $x \in \{ 3, 4, 5, 6 \}$ で H または $\neg H$ なので８通りの場合がある。

従って

$$H([1|2]) = -\frac{2}{12}\log_2\frac{2}{12} - \frac{2}{12}\log_2\frac{2}{12} - -\frac{8}{12}\log_2\frac{8}{12} \approx 0.195$$

となる。

(b) 実験 $[12|34]$ の情報量の計算。同様にして、

- $[<]$: 「$x \in \{\,1,2\,\}$ かつ $\neg H$」 または「$x \in \{\,3,4\,\}$ かつ H」で 4 通り
- $[>]$: 「$x \in \{\,1,2\,\}$ かつ H」 または「$x \in \{\,3,4\,\}$ かつ $\neg H$」で 4 通り
- $[=]$: 「$x \in \{\,5,6\,\}$」で H については不明なので 4 通り。

従って

$$H([12|34]) = \left(-\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3}\right) \times 3 \approx 1.58.$$

(c) 実験 $[123|456]$ の情報量の計算。同様にして、

$$H([123|456]) = 1.$$

以上により、最初になすべき実験は $[12|34]$ であることがわかる。

3. 二回目の実験は一回目の結果に依存して決めるのが効果的である。

(a) $[12] = [34]$ の場合。$[1|5]$ により $x = 5$ か $x = 6$ が判明する。この実験の情報量は 1.5 であることがわかる。

なお $[5|6]$ の情報量は 1 である。この実験では偽銅貨は判明しないことがすぐわかる。

(b) $[12] < [34]$ の場合。

実験	情報量
$[1\|2]$	1.5
$[1\|5]$	0.81
$[12\|35]$	0.81
$[12\|56]$	1
$[13\|24]$	1
$[13\|25]$	1.5
$[13\|56]$	1.5
$[123\|456]$	0.81
$[134\|256]$	0.81

従ってやるべき実験は $[1|2], [13|25], [13|56]$　のいずれかであるが、いずれにせよ、偽銅貨は確定しない。

(c) $[12] > [34]$ の場合は上と同様である。

[問 **32**] 銅貨の数が 9 個の場合のパズルを解け。

[問 **33**] 銅貨の数が 12 個の場合のパズルを解け。

[**Q10-1-文学部**]((1)) アトラクタをもう一度説明してください。

(質問理由：サイクルとごっちゃになってしまったので。)

[**Q10-1-法学部**]((2)) アトラクタという語がわかりません。

(質問理由：説明を理解できなかったため。)

[**A10-1**] 力学系がただ一つのサイクルを持つとき、そのサイクルをアトラクタと言います。どの状態から出発しても、有限回でそのサイクルに合流するので「引きつける者」ということでアトラクタと呼ばれています。

[**Q10-2**](文学部) 有限力学系のグラフは使い分けがあるのですか。

(質問理由：色々な表示方法があったので、どんな時には、これを使うというようなことがあるのか気になったため。)

[**A10-2**] 時間軸を入れた表示方法は、複数の初期状態から出発した軌道群を同時に表示することで、周期軌道などを見抜くのに便利です。これは、有限とは限らない力学系で重要な役割を果たします。

対角線を利用して軌道を追う方法は、区間力学系という種類の無限力学系を分析するのに使われます。理論的考察に効力があります。

平面グラフとして描くものは、力学系の構造を明確に表示するのに有効ですが、状態数が多くなると使えなくなります。

[**Q10-3**](法学部) どのような状態になると周期的な動きになるのですか。

(質問理由：一定のサイクルになるまでの動きと一定サイクルになったあとの動きの違いがどのように起るかわかりません。)

[**A10-3**] 動きの周期的性は「創発的」(emergent) と呼ばれる性質です。その状態自身の性質ではなく、また, 各時点での動き方だけで決まる性質でもなく、他の状態全体との関係によって生じているものです。

[**Q10-4**](文学部) 今日のコンピュ− タのピカピカしてたやつは、あれはひょっとしてパチンコ屋のネオンとかに応用されてませんか。

(質問理由：何となくピ− ンときたから)

[**A10-4**] 有りえます。

[**Q10-5**](法学部) 力学については大まかな意味がわかったので、これをどういうものに使うか、ということか知りたい

(質問理由：知的欲求から)

[**A10-5**] 変化するものを理解するときの基本的なアプロ− チの一つです。数理科学では基本的な道具 (というより基盤を成す考え方の一つ) です。

工学的には外からの制御を許すオ− トマトンが用いられます。家電製品の中枢にあるＩＣは、動作をオ− トマトンで記述したあとはＩＣ化することは自動化されています。

2001.1.10

２０００年度後期　数理の世界 第１１回
学部：　学科： 学籍番号：　氏名：
質問：
質問理由：

アンケート

次の表にチェックしてください.

1： 良く知っている　2：知らなかった 3：よくわかった　4：大体わかった　5：まだよくわからない

用語	1	2	3	4	5
エントロピー の定義	–	–			
エントロピー と情報量の関係	–	–			
実験の情報量	–	–			
パズルにおけるエントロピー の計算法	–	–			

意見・希望などがあればどうぞ：