理学部数学科 2000 前期 計算数学 1 [1]

担当：辻下　徹[2]

- きょうはマテマティカの演習は自習とします。配付したものを使って自分でやってみてください。
- 質問はできるだけ cs2000@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp 宛てにメールで送ってください。締め切りは当日中です。Subject 欄には、 3-cs と書いてください。Outlook などを使うときは「テキストで送信」というオプションにしてください (ふつうも、そうすべきです。デフォルトでは html 形式となっており、受取るメールソフトによっては見えないときもあります。)。

目 次

3　第 3 回 **1**
3.1　2 点を結ぶ鎖の探し方 6

4　木グラフとその応用 **7**
4.1　一方通行化問題 7
4.2　解法 7

3　第 3 回

前回の質問事項と回答

[**Q3-1**] 今日の授業であった連結と、位相空間にある連結とは違いますか。 / グラフが連結であるとは具体的にどういうことですか。

[**A3-1**] 位相空間の連結性と同じで、「連結でない」方がわかりやすいでしょう。グラフの頂点を二つにわけて、そのグループを結ぶ辺がないとき、連結ではありません。そうはならないとき、連結と言います。それを別の言い方をすると、「どの 2 点に対しても、それを端点とする鎖がある」ということになります。(位相空間で弧状連結、という概念をならったと思いますが、それです。)

[**Q3-2**] 予備知識、基礎知識としてどの分野を、勉強すればよいでしょうか？昨日の授業もよく理解できませんでした？

[**A3-2**] 予備知識は要りません。どこがわからなかったか具体的に書いてください。

[**Q3-3**] 出次数と入次数によって具体的にどんなことがわかるのか、またどんなことが言えるのか。

[1] URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/cs00.html

[2] Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

[**A3-3**] グラフの性質を表現するのに便利なのです。たとえば力学系はすべての頂点の出次数が 1 であるような有向グラフとして定義できます。また、来週定義する「木グラフ」は、入次数ゼロの一つの頂点を除いて、頂点の入次数がすべて 1 である連結なグラフ、として定義できます。

[**Q3-4**] 2.4.6 の例「$f : V \to V$ に対し、そのグラフ $G(f)$ をグラフと見ると ..」という表現が良くわからないのですが ..?

[**A3-4**] 中学で習った関数のグラフは、写像 $g : V \to W$ についてのグラフ

$$G(g) = \left\{ (x, gx) \;\middle|\; x \in W \right\} \subseteq V \times W$$

の特別な場合です。さて $V = W$ のときは、$G(f) \subseteq V \times V$ ですから $(V, G(f))$ は、有向グラフと見ることができます。これが上の「 」の意味です。少し、省略しすぎたようです。

[**Q3-5**] 2.4.3 で頂点集合が有限な場合とありますが、無限の場合もあるのですか。質問理由：数学を勉強していると必ず議論を一般化しようとする傾向があります。離散的世界には無限のものはないのでしょうか。もしあるとすればそのときの議論はお馴染みの図示できないなど抽象的な議論になっていくのですか。

[**A3-5**] 確かに無限離散数学は抽象的になり、同じ「離散」という言葉がついていますが、有限離散数学とは全く異質な数学です。

[**Q3-6**] 鎖やサーキットをもつグラフは具体的にどのようなグラフになるのか。グラフとは集合 V と V の順序対 E のなす組 (V,E) であり、V の元が頂点、E の元が辺となるが、辺の有限列である鎖ができることによって、グラフにどのような影響があるのかわかりません。辺を有限列のように並べることに意味があるのですか。

[**A3-6**] 鎖はいつもあります。サーキットを持つかどうかは重要なグラフの違いですが、サーキットを持つグラフは無数にあります。「グラフの辺を次々辿る」という素朴な操作を定式化したものが鎖です。

[**Q3-7**] ループの場合の入次数や出次数はひとつループがあるごとに 1 ずつ増えるのですか？質問理由：ループというのは 1 個の頂点から出てその点に戻るものなので入次数も出次数も 1 個増えるのは当然のことなのですが、なんかへんな感じがするので。

[**A3-7**] そうです。

[**Q3-8**] 2.4.1 で $e = (s, t)$ が辺のとき $e : s \to t$ と書くとありましたが、辺でないときはどういうことですか。

[**A3-8**] 「$e = (s, t)$ が辺である」とは「$(s, t) \in E$ 」ということの言い換えです。従って、$e = (s, t)$ が辺でないときとは、$(s, t) \notin E$ ということです。

[**Q3-9**] 講義で説明した以外のやり方でグラフが同じであると考えることはあるのですか。

[**A3-9**] あります。ホモトピー同値など。これは、グラフを 1 次元単体的複体として位相空間として実現するとき、それがホモトピー同値かどうかで分類するときです。これですと木と呼ばれるグラフは皆「同じ」になります。

[**Q3-10**] 具体的なグラフを記述する方法はどのくらいあるのか？

[**A3-10**] 集合的構造 $(V, E \subseteq V \times V)$ を表す方法は沢山あります。集合も元のリストで現わすことが普通です。行列が簡潔な表現であるのは、行列のサイズで V を表現してしまっている点です。

[**Q3-11**] グラフと幾何学の関係は？

[**A3-11**] グラフは幾何学に限らず数学の到るところで、構造を視覚的に表示するときに、よく使わ

れます。数と同様の遍在性があります。

[**Q3-12**] 集合論、写像等の復習は必要ありますか？

[**A3-12**] ありません。ここで使う集合論は「猿でもわかる集合論」です。構えないでください。

[**Q3-13**] グラフの用語などはわかりましたが、全てが抽象的すぎて、何のために何をしているのか全体像がつかめません。それともそういうものなのでしょうか ..？

[**A3-13**] そういうものではありません。まだ例をやっていないだけです。実際には、すでにパズルで例を体験してもらったので、それと、結びつけてみてください。

[**Q3-14**] 私は物理学科に所属しているのですが、離散数学が物理学のどのような分野に取り入れられているのか、もし具体的な例があれば教えてください。例えば講義資料の中にも「原子論からすれば世界は離散的だが我々が経験する世界は物理的には離散的には見えない」とあります。「電子のエネルギー順位がとびとびの値をとり、連続的な値はとらない」といったときの解釈は離散的といえるのでしょうか。また量子力学から導かれる仮定の一つに多世界解釈というのがあるそうですが、それは、どうなのでしょうか？また、今私がやっている物理学そのものが、本来は大きさのあるはずのものを大きさのない (仮想的な) 質点と考え、これに位置と運動量 (運動量と時間など他にも勘がえら得るが) を与えることによって成り立っていると思うのですが、こうした考え方は、離散と関連があるのでしょうか。

[**A3-14**] 原子一個に着目してその波動関数を考えるという点が、離散的な見方であると言えます、波動関数自身は離散的なものではありませんが。質点を大きさのない仮想的な考えることは、離散的とは別のことだと思います。

物理で用いられる群の表現論は色々なところで離散数学的な議論が使われます。また、統計物理学は、組み合わせ的なパターンの数え上げが肝心ですので、離散数学が重要な役割を果たしていると言えるでしょう。

[**Q3-15**] 自然な全単射はどのようなものか。

[**A3-15**] 圏論を学ぶと明確になります。今のところは、両辺の集合持つ各々持っている構造を使って定義される写像が全単射になったもの、という程度で理解しておいてください。

[**Q3-16**] V^X とは次元のことを表しているのですか。それともそのような意味はなく 2^X は 2 を X 回かけるという意味なのですか。V^X とは何か、よくわかりませんでした。

[**A3-16**] V^X は集合 X から集合 V への写像の全体です。$X = \{ 1, 2, 3, \cdots, n \}$ の場合は、$f : \{ 1, 2, \cdots, n \} \to X$ は、X の要素の順序 n-対 $(f1, f2, \cdots, fn)$ と 1 対 1 に対応しますから

$$X^{\{ 1,2,\cdots,n \}} \cong X^n$$

となります。つまり、X の n 個の直積と同じになります。

[**Q3-17**] グラフが同型であることが今一つはっきりしなかった。

[**A3-17**] どうはっきりしないのかを説明してください。

[**Q3-18**] 代数学と離散数学との関連は代数幾何学の一部になるのですか。グラフは関係の幾何学化ということなので、幾何学の分野と考えていいのですか。

[**A3-18**] 「幾何学」という言葉は、特定の分野 (トポロジーや微分幾何) などを差す場合 (カリキュラムではこの意味) と、一般的に視覚的直観を援用するものをいうときとがあります。極端には集合論自身が幾何学的である、ということさえできます。幾何学に対するのは、時間的要素を持ったものです。実際には、時空を持ってくると、これすら幾何学化されます。無時間性を基礎と

する現代数学は幾何学的であると言っても過言ではありません。

[**Q3-19**] パズルの mathematica による解法を見ると、まるでプログラミング言語のように見えますが、実際のところプログラムを組んだりできるんでしょうか。

[**A3-19**] 組めます。他の Basic,Fortran,C++,Java,Pascal,Lisp,Prolog と同様に万能言語です。

[**Q3-20**] Ｍａｔｈｍａｔｉｃａのプログラムを書く際に重要なことは何ですか。　「電卓のように使いこなす」のようなことを仰っていましたが、プログラム初心者の自分にとっては、何かコツがあるのか、また、そのようなものがあるのか判りません。　状況把握や抽象化などの作業が必要な気がしますが。

[**A3-20**] Mathematica では関数を定義するようにプログラムが書けます。数学科の者には便利です。例えば

```
fac[n_]:=If[n==0,1,n f[n-1]]
```

で階乗 $n!$ が定義できます。`If[C,A,B]` は、条件 C が正しいときは A, そうでないときは B を表します。

[**Q3-21**] テキスト１２ページに関する質問なんですけど、2.8.1.3. のとおりに打ったつもりなんですけど、「原子的な云々‥」というエラーメッセージが出て結局何が間違っていたのかわかりませんでした。Ｃ言語に比べてエラーがなんなのかわかりにくいです。どういうことをするとこのようなメッセージが出るのですか ?(スペル違いのときは違うメッセージでした。)

[**A3-21**] これだけでは答えられません。マテマティカは「高級言語」と呼ばれるもので、多くの関数とデータ構造がが用意されていて、同じことをさせるのにＣ言語よりもプログラムの長さは一桁少なくて済みます。データ構造が種々なために、その整合性に関するエラーも多くなります。「原始的な ..」というエラーは、変数のタイプが間違っている時のものと思います。便利なものは間違え方も多様になるのは当然で、エラーの種類が多くなります。

[**Q3-22**] コンピュータを使って数学をするとききますが、いったい、どんなことをするのですか。数学って紙とペン (と頭) があればできるというイメージがあるのですが。

[**A3-22**] 紙と鉛筆でする計算とマテマティカでできる計算は、徒歩で歩くのと飛行機で飛ぶのとの違いくらいあります。もちろん徒歩で歩くことも重要ですが、見える範囲は限られています。広大な数学の具体的な地形を知る全く新しい道具が計算機です。数学は具体的計算をしても定理が証明できるわけではないというのは数学を知らない人が言うことです。計算機は数学的現象を探り定理を見出すための道具です。$1-x^{1000}$ を因数分解してみようと思う人は居ないでしょう。しかし、そういうことがマテマティカでは一瞬の内にできます。そういう遊びが数学には不可欠なのです。

[**Q3-23**] Ｍａｔｈｅｍａｔｉｃａは計算以外に使い道はありますか？

[**A3-23**] コンピュータは計算以外に使い道がありますか、と同じ質問です。

[**Q3-24**] マテマティカが使いこなせるようになると就職に有利ですか？そもそもマテマティカはパズルを解くほかにどんなことができるのですか？SE になるには必要なのかなあと思ったので。

[**A3-24**] SE になるには、何かを使いこなせるた経験が重要です。一つの言語を使いこなせれば他の言語は容易に習得出来るからです。これは外国語よりも遥かに簡単です。その意味で、マテマティカは習得しやすい言語であると共に、いろいろなプログラミングのコンセプトが取り込まれていますので、高度なプログラミングの仕方を身につけることができると思います。

[**Q3-25**] Mathematica で`<<DiscreteMath‘Combinatorica‘` という、離散数学のパッケージの読み

込みというものがありましたが、そもそも ” パッケージの読み込み ” とはどういうことなのですか。[3]足説明：第一回の授業でやった、川渡りパズルの Mathematica を使った解法には ” 離散数学のパッケージの読み込み ” というものがありましたが、パッケージとはもともと機械のほうに組み込まれている、離散数学のプログラミングということですか。宣教師の問題のところでも、パッケージの読み込みというものがあったので、どういったことをやっているのか詳しく知りたいです。

[**A3-25**] プログラムのパッケージです。Mathematica は関数型言語で、プログラムは関数を定義し、プログラムの実行は、定義した関数を計算する、という形式をとります。

さて、Mathematica 自身に組み込まれた関数で直接できることは、かなり多いものの、限られています。それを組み合わせて便利な関数を用意したものがパッケージです。フォートランなどでは、ライブラリーということがあります。

[**Q3-26**] 自習の内容は計算機演習と同じなのでしょうか。

[**A3-26**] 違います。計算機演習はユニックスの基本的な使い方を学ぶものです。この講義の自習はマテマティカという大学の数学用のシステムを身につけて数学の世界で遊べるようになってもらうことを目的としています。

[**Q3-27**] 先週の例のようなものだと頭で考えていった方が速いと思います。単純な計算も自力の方が速いと思います。やはり 2^{1000} 等、時間と労力を使うものにしか有効でないような気もします。

[**A3-27**] 自分が出来る計算を単純な計算とよび、できないものを時間と労力を使うもの、と呼んでいるだけではないのですか。$1-x^n$ を因数分解することは、n がいくつくらいになると単純でなくなるか考えてみてください。

[**Q3-28**] マテマティカで数学の証明問題などを解かせることはできますか？

[**A3-28**] 計算機でできることはマテマティカでできます。機械証明という大きな研究分野があり、計算機で数学の証明をさせる努力がされています。計算機では証明できない定理があることがわかっています (ゲーデルの不完全性定理)。

[**Q3-29**] マテマティカでは無向グラフだけをあつかうのですか。

[**A3-29**] そんなことはありません。非対称なグラフを有向グラフとして扱う関数があります。

[**Q3-30**] mathematica では、具体的にどのような問題が解けて、どのような問題が解けないのですか？質問の補足：計算機でもやはり限りがあると思います。数学的に厳密に定義されてない内容や、論理性に欠ける問題などは、計算機も解けないと思います。しかし、僕が知りたいのは、数学的に定義された内容、および、数学そのものである問題にたいしても、計算機が解けない場合もあるのかどうかということです。

[**A3-30**] その問題が古典的計算論の主題です。実際に計算できないことがわかる数学的関数があります。チューリング機械の停止問題がその例です。チューリング機械の構造と初期データは、適当なコーディングにより文字列で表現できますが、それがいつか停止するとき 1 停止しないとき 0 という値を取る関数が数学的には定義できますが、この関数を計算するプログラムを書くことはできないことが、意外と簡単に証明できます。

[**Q3-31**] マテマティカは社会の中でどのように役立てられているのですか。マテマティカで電卓のように計算できたり、川渡りのパズルを解くことができるのはわかったのですが、実際の生活の中でつかわれていたりするのですか。また、大学院でも使うのですか。

[3]補

[**A3-31**] 私は確定申告の計算に使っています。電卓と違うところは一連の長い計算を記録しておけること、また、一部を変更して何度でも計算し直すことができます。もっとも、こんなことに使うには大道具過ぎるかも知れませんが、他の表計算などよりは遥かに使いやすいものです。要するに、計算は自動的にしてくれるノートのように使えます。これは計算機能 + ユーザフレンドリーな入出力形式、によるものと言うことができます。

3.1　2 点を結ぶ鎖の探し方

グラフの上で、出発点 p から目標点 q への鎖を探す。

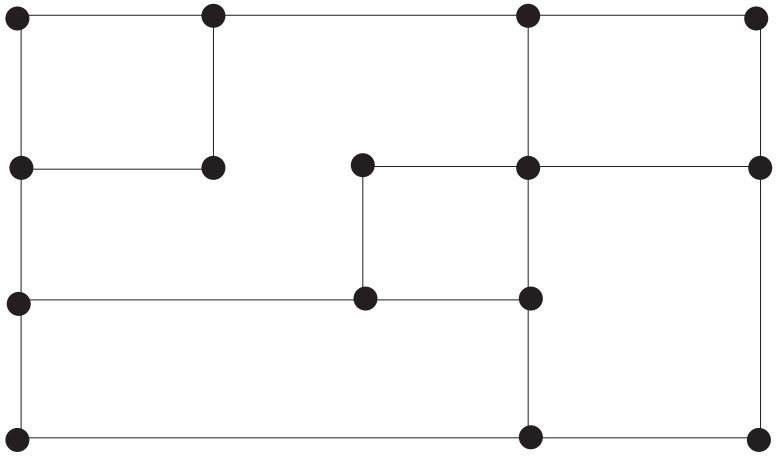
1. **breadth-first search**：p から、すべての可能性を順にしらみ潰しに探す。すなわち、
   (a) まず、p に数 0 を書く。$n := 0$ とおく。
   (b) 次を繰り返す：
      i. 数 n が書かれた頂点がなければ終了。
      ii. 数 n が書かれた頂点各々について、
         - それと隣接した頂点の中で数がまだ書かれていないものがあれば、それに数 $n+1$ を書く。
      iii. $n := n+1$ とおく。
   (c) 目標頂点 q に数 k が書いてあれば、p から q へ長さ k の道があり、何も書いてなければ、p から q へは道がない。

2. **depth-first search (backtrack 法)**：p から先へ先へと進む。すなわち、
   (a) まず、p に番号 0 を付ける。$n := 0$ とする。
   (b) 次を繰り返す：
      i. 番号付き頂点の隣接頂点はすべて番号付きであるときは終了。
      ii. そうでないとき：番号付き頂点で、番号なしの隣接頂点を持つものの中から、番号が最大のものをとり、その隣接頂点で無番号なものの一つに $n+1$ という番号を付け、$n := n+1$ とおく。
   (c) 目標頂点 q に番号が書いてあれば、p から q への道があり、何も書いてなければ、p から q へは道がない。

4　木グラフとその応用

4.1　一方通行化問題

次のような道を持つ町のすべての道を一方通行にして、しかもどの 2 地点の間をも行き来できるようにすることが出来るか？



4.2　解法

定理.　γ を連結グラフとする。このとき、

$$\gamma \text{ が強連結な向き付けを持つ} \Leftrightarrow \gamma \text{ は橋を持たない.}$$

ここで、辺 $\{ a, b \}$ が橋であるとは、それをとりのぞくと連結ではなくなることをいう。

（$\leftarrow$ は自明。$\rightarrow$ は強連結な向き付けの構成法を与えて示す。その構成法で「展張木」を用いるので、まず木についての基礎事項を学ぶ。）