きょうの予定 Nelson による、数学的帰納法を使わない数学の再構築の紹介の続き。

- Nelson の predicative arithmetic (2)

目 次

7 自然数列の不定性 (2) **2**

7.1 復習 . . . 2

7.1.1 理論 Q_0 . . . 2

7.1.2 拡大 Q_1 . . . 2

7.2 帰納法の使用による数の概念の変化 . . . 3

7.2.1 開いた論理式 . . . 3

7.2.2 帰納的論理式 . . . 3

7.2.3 メタ定理 6.2: 開いた帰納的論理式による拡大 . . . 3

7.2.4 OI:開帰納法 (open induction) . . . 3

7.2.5 メタ定理 6.3:開帰納法の使用を可能にする方法 . . . 3

7.2.6 例 . . . 4

7.2.7 メタ定理 6.4:「Q_1' は Q で表現可能」 . . . 4

7.3 理論 Q_2 . . . 4

7.3.1 メタ定理 7.3 . . . 4

7.3.2 有界帰納法 (BI,Bounded Induction) . . . 5

7.3.3 メタ定理 8.1:有界最小数原理 (BLNP,Bounded Least Number Principle) . . . 5

7.4 どこまで議論の仕方が広がったか . . . 6

7.4.1 練習問題 . . . 6

7 自然数列の不定性 (2)

7.1 復習

7.1.1 理論 Q_0

1 階の理論 $(\{\ 0, S, P, \times, +\ \}, \{\ (3.1) - -(3.7))\ \}$ を Q_0 とする。公理はどれも存在記号をもたない。このような場合、理論は開いている(open) という。

3.1 Ax. $Sx \neq 0$,

3.2 Ax. $Sx = Sy \Rightarrow x = y$,

3.3 Ax. $x + 0 = x$,

3.4 Ax. $x + Sy = S(x + y)$,

3.5 Ax. $x \cdot 0 = 0$,

3.6 Ax. $x \cdot Sy = x \cdot y + x$,

3.7 Ax. $Px = y \Leftrightarrow Sy = x\ \vee\ (\ x = 0\ \wedge\ y = 0\ )$.

7.1.2 拡大 Q_1

以下を公理として添加したものを Q_1 と書く。これも開いた理論であある

3.8 Ax. $(x\ +\ y\ )\ +\ z\ =\ x\ +\ (\ y\ +\ z\ )$,

3.9 Ax. $x \cdot (y\ +\ z\ ) = x \cdot y\ +\ x \cdot z$,

3.10 Ax. $(x\ \cdot\ y\ )\ \cdot\ z\ =\ x\ \cdot\ (\ y\ \cdot\ z\ )$,

3.11 Ax. $x\ +\ y\ =\ y\ +\ z$,

3.12 Ax. $x\ \cdot\ y\ =\ y\ \cdot\ z$.

先週の資料で これらの公理が Q_0 の中で証明できる、と書いたが、数学的帰納法が 使えない Q_0 ではそれは間違いである。Predicative arithmetic ではこれらは、数の性質についての新しい要請となっている。精密化した双対化 (次節) によって Q_1 を Q_0 の中に解釈できるが、これは、別の言い方をすると、 (3.8)-(3.12) を要請することにより、数の概念が変化することを意味する。

Q_1 に 述語記号 $\leq$ と、その定義を公理として添加したものを Q_1' と書いた。

7.2 帰納法の使用による数の概念の変化

7.2.1 開いた論理式

論理式が開いている (open) であるとは、量化記号を含まないことをいう。1 階の理論 T' が T の開いた拡大(open extension) であるとは T に添加される論理式はすべて開いていることをいう。

7.2.2 帰納的論理式

x を自由変数として含む論理式 C について

$$ind_x C := C_x[0] \ \wedge \ \forall x(C \ \Rightarrow \ C_x[Sx])$$

と定義する。

$$\vdash ind_x C$$

であるとき C は x について帰納的な論理式という。

7.2.3 メタ定理 6.2: 開いた帰納的論理式による拡大

T が Q_0 の開いた拡大とする。A が x について帰納的な T の開いた論理式であるとする。このとき、理論 $T[A]$ は T で解釈可能である。

ここで $T[A]$ は、T の言語に論理式 A を表現するのに使う記号を添加し、さらに A を公理として添加した理論を表す。これは、前回の A^3 により相対化すればよい。公理 B は開いているので B を相対化したものも当然証明できる。

7.2.4 開帰納法 (OI,Open Induction)

これは次の推論規則のことをいう。

論理式 A が開いていて x が出現するならば、$ind_x A$ から A が推論される。

7.2.5 メタ定理 6.3:開帰納法の使用を可能にする方法

$\widetilde{Q_0}$ を Q_0 に開帰納法を推論規則として加えた理論とする。$B_1, \cdots, B_\lambda$ が $\widetilde{Q}_0$ の定理ならば $Q_0[B_1, \cdots, B_\lambda]$ は Q_0 に表現できる。

これにより、個々の帰納的開論理式に帰納法を適用しもよいことになるが、「してもよい」

のは自然数の概念に、それが使えるようにするだけの不定性が残っているからである。しかし、それが使えるようにすることにより、自然数の概念が変化してしまうことが、この講義の文脈では重要。

7.2.6 例

結合律 $(x+y)+z=x+(y+z)$ は $\forall x\forall y((x+y)+z=x+(y+z))$ について開帰納法を使えばよい。

7.2.7 メタ定理 6.4:「Q_1' は Q で表現可能」

公理 (3.8)–(3.12) は自然数の不定性によって実現可能な性質であることがわかる。これらにより自然数の概念は変化する。

7.3 理論 Q_2

Q_1' を以下のように拡大した理論を Q_2 と書く。

論理式が明示的に有界(manifestly bounded) とは、存在記号はすべて $\boxed{\exists x(x\leq a\ \wedge\ C)}$ という形で現れるものをいう、ただし、a は変数 x を含まない項とする。このとき、理論 Q_2 は、理論 Q_1' の、明示的に有界な論理式 A ごとに次の公理 (MBI, Manifestly bounded induction) (明示的有界帰納法) を加えたもの。

MBI $A_z[0]\ \wedge\ \forall x(x\leq y\ \Rightarrow\ A_z[Sx])\ \Rightarrow\ (x\leq y\ \Rightarrow\ A)$

ただし、変数 y は A に出現しないとする。

7.3.1 メタ定理 7.3

$B_1,\cdots,B_\lambda$ が Q_2 の定理ならば $Q_1'[B_1,\cdots,B_\lambda]$ は Q_1' に解釈可能である。

(Nelson p24) これより、MBI を用いてもよいことがわかるが、開帰納法の場合と同様に、用いるごとに数の概念が変化する。

7.3.2 有界帰納法 (BI,Bounded Induction)

理論Tの論理式Aが有界(bounded form)であるとは、Aに出現する束縛変数を$x_1, \cdots, x_\nu$とするとき、項$a_1, \cdots, a_\nu$でa_iは変数x_iを含まないようなものがあり、

$$\vdash A \Leftrightarrow A'$$

となる、ただし、A'は、その構成途中で現れる$\exists x_i\ C$を$\exists x_i(x_i \leq a_i\ \wedge\ C)$に置き換えたものを表す。

AがQ_2の有界な論理式でであるとき

BI. $ind_x\ A\ \Rightarrow A$

はQ_2の定理である。

UをQ_2の拡大とする。aUの論理式AがQ_2上で有界であるとは、AがQ_2の有界な拡大Tの有界な論理式であることをいう。

ここで、理論TがQ_2の有界な拡大であるとは、

- 述語記号pの添加に伴う公理
$$px_1 \cdots x_\nu \Leftrightarrow D$$
の論理式Dが有界であり、
- 関数記号fの添加に伴う公理
$$fx_1 \cdots x_\nu = y \Leftrightarrow D$$
について、論理式$\exists y\ D$が有界であることをいう。

7.3.3 メタ定理 8.1:有界最小数原理 (BLNP,Bounded Least Number Principle)

Aを論理式とし、x, y, zを変数とする。u, v, wをx, y, zと異なり、またAには出現しない変数とする。このとき、次の論理式を$min_{x,y,z}A$と表す。

$$A\ \wedge\ \neg\exists x\ \exists y\ \exists z(u \leq x\ \wedge v \leq y\ \wedge w \leq z\ \wedge$$
$$(u \neq x\ \vee\ v \neq y\ \vee\ w \neq z)\ \wedge\ A_{x,y,z}[u, v, w]).$$

UをQ_2の拡大とし、AをUの論理式でQ_2上で有界であるとする。このとき

BLNP. $\exists x_1 \cdots \exists_\nu A\ \Rightarrow\ \exists x_1 \cdots \exists_\nu \min_{x_1 \cdots x_\nu} A$

はUの定理である。

7.4 どこまで議論の仕方が広がったか

以上で、Q_2 の有界拡大をしても Q の中で解釈できることがわかった。しかも BI(評価付き帰納法),BLNP(有界最小値原理) を使うことができる。ただし、それを使うごとに、数の概念が変化していくことに注意する必要がある。

7.4.1 練習問題

以下を有界帰納法と有界最小数原理を使って示せ。(節番号は Nelson の本を踏襲.)

9.1 Thm. $z_1 + y = z_2 + y \ \Rightarrow \ z_1 = z_2$.

9.2 Def. $x - y = z \Leftrightarrow z + y = x$ otherwise $z = 0$.

ここで、「P otherwise Q」 は $P \vee (\neg P \ \wedge \ Q)$ の略。

9.3 Thm. $y \neq 0 \ \wedge \ z \cdot y = 0 \ \Rightarrow \ z = 0$.

9.4 Thm. $y \neq 0 \ \wedge \ z_1 \cdot y = z_2 \cdot y \ \Rightarrow \ z_1 = z_2$.

9.5 Thm. $y \neq 0 \ \Rightarrow z \leq z \cdot y$.

9.6 Def. $x/y = z \Leftrightarrow z \cdot y = z \ \wedge \ y \neq 0$ otherwise $z = 0$.

9.7 Thm. $x \leq y \ \vee \ y \leq x$.

9.8 Thm. $x \leq y \ \wedge \ y \leq x \ \Rightarrow \ x = y$.

9.9 Def. $Max(x, y) = z \Leftrightarrow (x \leq y \ \wedge \ x = y) \ \vee \ (y \leq x \ \wedge \ z = x)$.

9.10 Def. $x < y \Leftrightarrow x \leq y \ \wedge \ x \neq y$.

9.11 Thm. $y \neq 0 \ \wedge \ x = y \cdot q_1 + r_1 \ \wedge \ r_1 < y \ \wedge \ x = y \cdot q_2 + r_2 \ \wedge \ r_2 < y \ \wedge \ \Rightarrow \ q_1 = q_2 \ \wedge \ r_1 = r_2$.

9.12 Thm. $y \neq 0 \ \Rightarrow \ \exists q \, \exists r \, (x = y \cdot q + r \ \wedge r < y)$.

9.13 Def. $Qt(y, x) = q \Leftrightarrow \exists r \, (x = y \cdot q + r \ \wedge \ r < y) \ \vee \ (y = 0 \ \wedge \ q = 0)$.

9.14 Def. $Rm(y, x) = r \Leftrightarrow \exists q \, (x = y \cdot q + r \ \wedge \ r < y) \ \vee \ (y = 0 \ \wedge \ r = 0)$.

9.15 Def. $1 = S0$.

9.16 Def. $2 = S1$.

9.17 Def. $3 = S2$.

9.18 Def. $4 = S3$.

9.19 Def. $5 = S4$.

9.20 Def. $6 = S5$.

9.21 Def. $7 = S6$.

9.22 Def. $8 = S7$.

9.23 Def. $9 = S8$.

9.24 Def. $Dec(x, y) = x \cdot S9 \ + \ y$.

9.25 Def. $x|y \Leftrightarrow \exists z \ x \cdot z = y$.

9.26 Thm. $x|y \ \wedge \ y \neq 0 \ \Rightarrow \ x \leq y$.

9.27 Thm. $a = b + c \ \wedge \ x|a \ \wedge \ x|b \ \Rightarrow \ x|c$.

9.28 Def. p is a prime $\Leftrightarrow p \neq 1 \ \wedge \ \forall x(x|p \ \Rightarrow \ x = 1 \ \vee \ x = p)$.

9.29 Thm. p is a prime $\wedge \, p|a \cdot b \ \Rightarrow \ p|a \ \vee \ p|b$.