11 数記法

目 次

数記法と独立に数が存在すると思われる。その心理的根拠の一つは、「回数としての数」の確かさにある。これは「棒記法による数」への安心感と同じものである。いわば、兌換紙幣に意味を与える金の役割に相当する確固としたものがある、と思われている。個々の数記法は「数を表す」という機能を越えた独自の存在であり、それが数学を実質的に支えているという見方の方が適切かもしれない。

11.1 具体的数

「具体的数について一般的に論じる」、「具体的な数同志の具体的関係について、一般的に論じる」という様相を吟味する。

[11.1-1] 具体的数しかない。

[11.1-2] 具体的数は、なんらかの数記法で実際に表わされるもののことである。

[11.1-3] 原理的に表される数、という表現は使わないことにする。（使ってもよいが、それによって今問題にしていることが見かけ上、蒸発してしてしまう。）

[11.1-4] 体系的な表し方を数記法と呼ぶ。同一数記法で表された数同志は種々の相互関係を持つ。例としては、棒記法、石記法、算盤、十進法、べき記法、漢数字。

[11.1-5] 異なった数記法の間の翻訳は一般に困難であり、ある数記法で表された具体的数は、別の数記法では具体的な数にはならないこともある。簡単な例は10000000000000000000000という具体的十進数は、棒記法では具体的な数ではない。

[11.1-6] 一つの数記法内の２つの数の表記が「同じ」かどうか、すぐに判定できるとは限らない。

[11.1-7] 数の記述法にはそれぞれ「実行可能な」演算が伴っている。演算は数記法と不可分である。

[11.1-8] 十進法特有の演算が沢山ある。 十進法では加減乗除の方法が、具体的な数の範囲で閉じているが、「べき演算」を一般に求めることはできない。

[11.1-9] また、棒の数を使う記法では、具体的な数の範囲で閉じている演算は加減除算であるが、掛け算は閉じていない。

[11.1-10] 新しい数記法は、新しい具体的数を産むと共に、新しい演算を産む。べき記号を用いた数記法での具体的数 $10^{1000000}$ は、十進法では具体的な数ではない。

[11.1-11]

$$123 \to 321$$

各記法は独自の演算を産みだす。

[11.1-12] 十進法と棒記法の関係は一部に限られている。

11.2 一般的な数

[11.2-1] 一般的数は文字を使って表す。一般的数を用いて加減乗除などの仕方を記述する。$n+m, n\times m, n-m, n/m, n^m$ 等々。これらの演算の帰納法による定義は、棒記法を用いた定義と見ることができる。

[11.2-2] 各数記法は一般的表示法を持つ。たとえば、十進数では $a_0a_1a_2\cdots a_m$. 棒記法では $n+1$. 浮動小数点表示では $a\times 10^b$ ($0\leq a<1, b\in \mathbf{Z}$).

[11.2-3] 各数記法は、その一般的表示法を用いて演算を定める。たとえば

$$n+(m+1)=(n+m)+1.$$

$$a_ma_{m-1}a_{m-2}\cdots a_0+b_nb_{n-1}b_{n-2}\cdots b_0 := c_kc_{k-1}c_{k-2}\cdots c_0,$$

ただし、$c_i=(a_i+b_i \mod 10)+(a_{i-1}+b_{i-1})/10$

$$a^b\oplus c^d := (a+c)^{bd}.$$

[11.2-4] （数学の自然数論に表された）棒記法による自然数は、具体的数の中の小さな位置しかしめない。

[11.2-5] 「ある数と次の数の積は偶数である」という主張は「次の数」と「積」と「偶数」が有効な数記法でしか意味をなさない主張となる。たとえば、棒記法では積は有効な演算ではないので、上は何も言っていない。上の証明を帰納法で行うと、何をしているかわからないようなおかしなことになる。

11.3 一般的数の具体的記法

[11.3-1] 具体的な数をはなれて、一般的数についての議論に終始することができる。そのとき、「一般的な数」自身が新たな具体的対象となる。このとき、一般的な数を表現する表記法が発生する（これは代数系と呼んでいいかもしれない）。代数系ごとに新しい「一般的な数」が生じる。典型的なものが環であり、これによる表記が多項式。さらに種々の帰納法による関数が「定義」される。

[11.3-2] 具体的な数との接点を離れると、一般的数の表記法の妥当性を議論することはできない。

[11.3-3] 「具体的な「一般的な数」」について議論するために、一般的な「一般的な数」というもの（関数と呼ぶ）が発生する。しばしば、$f(n)$ と書かれる。

[11.3-4] 関数は「数 n を数 $f(n)$ に対応させる」と言うことになっているが、これまで見たように、数記法と代数系との整合性を度外視しているため、特定の数記法を選ぶとき、具体的な数 n に具体的数 $f(n)$ が対応しているとは限らない。

[11.3-5] 関数を写像として理解することはできない。

11.4 不定な最大数を持つ数論の素描

「具体的な数」に基づく数学の可能性を見るには、超準数学の「標準的な」を「具体的な」と読み替えてみるとよい。このとき、非標準的な数はいずれも「不定な最大整数」として使うことができる。