数学雑考

69/5

～ $\pi(x)$ の評価 ～

○　充分大きな正数 n に対し，n 以下の素数の数（かず）を $\pi(x)$ とすれば

$$0.6\,\frac{n}{\log n} < \pi(n) < 4\,\frac{n}{\log n}$$

が成り立つ。

［証明］　$\psi(n) = \sum_{p \leq n} \left[\frac{\log n}{\log p}\right] \log p$ 　（p は素数）

とおくと（ヴィノグラードフの整数論入門 2 章問 9 より）

$$\psi(n) < 2n \qquad (1)$$

一方　$\log p^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]} \geqq \log p^{\frac{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]+1}{2}} > \log \sqrt{n}$

（∵　$p \leq n$ の時 $\left[\frac{\log n}{\log p}\right] \geq 1$ だから $\left[\frac{\log n}{\log p}\right] \geq \frac{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]+1}{2}$（等号は $p=n$）

又　$p^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]+1} > n$　$\sqrt{\ }$ をとって対数にすれば後の不等式を得る。）

この不等式の両辺を各素数について総和すれば

$$\psi(n) = \sum_{p \leq n} \left[\frac{\log n}{\log p}\right] \log p > \frac{1}{2}\pi(n) \log n \qquad (2)$$

(1) 及び (2) より

$$\frac{1}{2}\pi(n)\log n < 2n$$

$$\therefore\ \pi(n) < 4\,\frac{n}{\log n}$$ （これは任意の自然数に対し成立）

下からの評価の方は次のとおり

$$\log([n]!) - 2\log\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right) = \psi(n) - \psi\left(\frac{n}{2}\right) + \psi\left(\frac{n}{3}\right) - \cdots\cdots$$

$$\therefore\ \psi(n) > \log\frac{2k!}{(k!)^2} = 2k\log 2 - \frac{1}{2}\log \pi k - \varepsilon$$ （$k \to \infty$ に対し $0 < \varepsilon \to 0$）

（但し $k = \left[\frac{n}{2}\right]$）

一方　$\psi(n) = \sum_{p \leq n} \left[\frac{\log n}{\log p}\right] \log p \leqq \sum_{p \leq n} \frac{\log n}{\log p} \log p = \pi(n) \log n$

$$\therefore \quad \pi(n)\log n \geqq n\log 2 - O(\log n)$$

$\log 2 > 0.6$ だから n が充分大なる

$$\pi(n) > 0.6\,\frac{n}{\log n} \qquad \text{q.e.d.}$$

～有限アーベル群の構造について～

○　有限アーベル群 G の位数を n とする。この時 n の適当な，どの因子も各々一つの素数の累乗となるような分解

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k \qquad (1)$$

を取れば G はこの各因子 n_i を位数に持つ G の部分群 H_i によって直積の形

$$G = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_k$$

に書かれる。しかも群 G と n の分解 (1) の対応は同型を除いて一対一である。

[証明]　G の組成列を $E \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_m = G$ とする。
(但し同じものはこの列から省いておく)
G_i についての帰納法で定理の前半を証明する。

(i)　E については明らかに定理は成り立つ。

(ii)　i 以下の G_i について定理が成り立つと仮定する。

$G_i = H$,　$G_{i+1} = N$　とおく。

＊　拡大 N/H は素の拡大でありしかも N, H が G の組成列であることから剰余群 N/H の位数は素数 p である。又 N, H が組成列であることから H に任意の $N-H$ の要素を付加しても N が生成する。

▷　まず $N-H$ の任意の一要素 α_1 を取る。この時 $\alpha_1^p \in H$ である。
(但し p より小さい q では $\alpha_1^q \notin H$)
なぜなら p より小さい q で $\alpha_1^q \in H$ となるならば $H(\alpha_1)/H$ の位数が $q<p$ になる。もし p 以下のどの数 r でも $\alpha_1^r \notin H$ ならば $H(\alpha_1)/H$ の位数は p より大きくなる。$H(\alpha_1)/H = N/H$ だからこれらは明らかに仮定に反す。
H についての仮定より H はその位数を適当に因数分解したものの直積だから

$$\alpha_1^p = u_1^{e_1} u_2^{e_2} \cdots u_s^{e_s} \cdot v_1^{f_1} v_2^{f_2} \cdots v_r^{f_r} \qquad (2)$$

と表わせる。(ここで u_i, v_j 等は定理の意味での部分群に属する要素で、uで表わされている方はその属する部分群の位数がpの累乗のものであるとする。又 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ の順にその属する部分群の位数が増加するものとする)

v_jの位数を全部乗じたものをcとする。(又は nからpの累乗を抜き去ったもの)

そして (2) の両辺を c 乗する。すると群の性質から

$$\alpha_1^{pc} = u_1^{e_1 c} u_2^{e_2 c} \cdots u_s^{e_s c} \qquad (3)$$

となる。ここで $ce_s, ce_{s-1}, \cdots$ のうち最初に出てくるpの倍数でないものを $ce_t = \beta$ とおく。(もしすべてがpの倍数なら

$(\alpha_1^c)^p = (u_1^{e_1'} u_2^{e_2'} \cdots u_s^{e_s'})^p \longrightarrow (\alpha_1^c u_1^{-e_1'} u_2^{-e_2'} \cdots u_s^{-e_s'})^p = e$ この ( ) 内は $N-H$ の要素だから これを α とおけば $\alpha^p = e$ しかも群 $\{e, \alpha, \cdots, \alpha^{p-1}\}$ は他の群と素だから H の直積表現にこの群を加えてやれば それが N の直積表現になる) β が定まれば (3) を変形して

$$(\alpha_1^c u_{t+1}^{-e_{t+1}'} u_{t+2}^{-e_{t+2}'} \cdots u_s^{-e_s'})^p = u_1^{ce_1} \cdots u_t^{\beta} \qquad (4)$$

u_tの属するHの部分群をH_t(位数p^λ), Hの直積表現

$$H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_s \times K \quad (k\text{は (2) の }v\text{ の群に相当する})$$

のH_tを抜いたものを $H' = H_1 \times \cdots \times H_{t-1} \times H_{t+1} \times \cdots \times H_s \times K$ とおく。 H'に上の (4) の ( ) 内の要素をαとして付加する。すると α は明らかに $N-H$ の要素で しかも $(p^\lambda, \beta) = 1$ だから (4)式から ∴ $u_t \in H'(\alpha)$ である。 ∴ $H'(\alpha) = N$

∴ $H'(\alpha)/H' = p^{\lambda+1}$ で 故に $\{e, \alpha, \cdots, \alpha^{p^{\lambda+1}-1}\}$ と H' は素である。したがって $\{e, \alpha, \cdots, \alpha^{p^{\lambda+1}-1}\} = H_t'$ とすれば N は

$$N = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_{t-1} \times H_t' \times H_{t+1} \times \cdots \times H_s \times K$$

と書ける。

以上で G に対して定理が証明された。 後半を証明するには
n の任意の分解 $n_1 n_2 \cdots n_k$ について形式的に n_i の巡回群の直積で群 G をつくれば(因数分解) $\longrightarrow$ (群) の対応ができるし、
又 1つの群が 2つの n の因数分解に対応することがない ということが次のことからわかる。

n の異なる分解 $n_1 n_2 \cdots n_k$, $n_1' n_2' \cdots n_k'$ に対応する群を G, G' とする。 もし G と G' が同型ならば n の一つの素因数 p をとり n_i, n_i' の中に含まれる p の最大指数のものを n_1, n_1' とすれば、もし $n_1 > n_1'$ ならば G の中には n_1 乗してはじめて e になる要素があるのに G' の中の要素はそのような要素は明らかになく、従って $n_1 = n_1'$ n_1, n_1' に対応する部分群を H, H' とすれば

$$G \cong G'$$

より

$$G/H \cong G'/H'$$

G/H, G'/H' についても上と同じことを繰り返せば 分解 $n = n_1 n_2 \cdots n_k$ と $n = n_1' n_2' \cdots n_k'$ が全く同じであることがわかる。

○ 以上の定理から位数 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ の有限アーベル群の数は

$$\phi(e_1)\phi(e_2)\cdots\phi(e_k)$$

個あることがわかる。（ここで $\phi(s)$ は数 s の分割数を表わす）

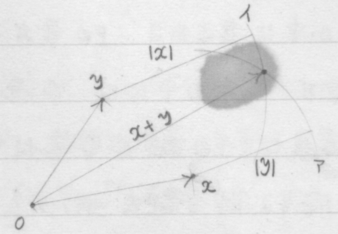
69/8

～コンパスだけによる作図～

○ 最初に2個の点 P_0, P_1 が与えられている時、この2点から出発して作図可能なあらゆる点を考える。この時それらの点の集合を E とすれば E は（$P_0=0$, $P_1=1$ とおいたガウス平面上の点を複素数とみて）有理数に√を有限回適用した数からなる数体である。（正確には作図可能な数は有理数体 P の 2^n 次ガロア拡大体に属する数である）

[証明] まず E が体であることを証明する

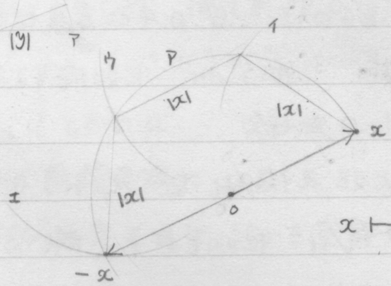
a, 加法



x, y が共線の時は求める点は2円の接点になる。（$y=x$ の時は $-x$ と同じ方法になる）

$x, y \longmapsto x+y$

（x, y が非共線）

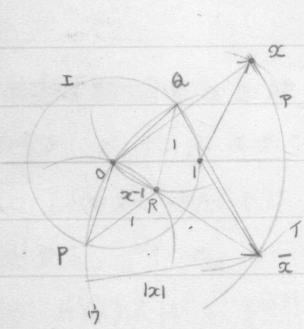


$x \longmapsto -x$

b, $-x$ 正六角形の作図を利用して右図のようにつくる。

c, 乗法； これは P_0, P_1 から y を求める手続きを、P_0, x の2点を最初に与えられた2点として行なえば、点 xy が作図できる。

d, x^{-1} まず原点中心に半径 $|x|$ の円を描き 三角形 $01x$ を座標軸に沿って裏返し $\bar{x}$ を作図する。次に $\bar{x}$ から半径 $|x|$ の円を描き又原点中心に半径1の円を描きそれらの交点 P, Q をつくる。次に P, Q から半径1の円を描き2円の原点と異なる交点 R を求めれば三角形 $OQ\bar{x}$ と今できた三角形 ROQ は相似だから



$x \longmapsto x^{-1}(R)$

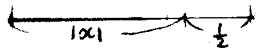
$$1 : |x| = \overline{OR} : 1$$

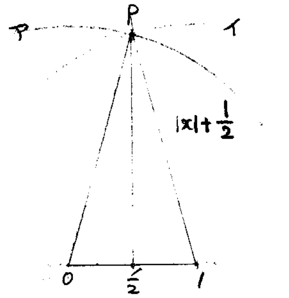
$$\therefore \quad \overline{OR} = \frac{1}{|x|}$$

で R を表わす複素数は偏角が x の符号を逆にしたもので絶対値が $\frac{1}{|x|}$ だから x^{-1} である。

α が作図可能なら $y^2=\alpha$ である y は作図可能である

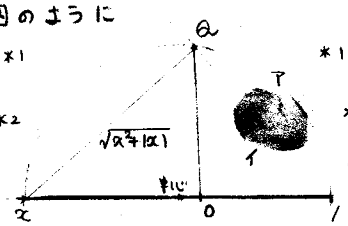
i α が実数の時 $\sqrt{\alpha}$ の作図





。 α が負の時、前の作図に従って $|\alpha|+\frac{1}{2}$ 及び $\frac{1}{2}$ を作図し右図の $\frac{1}{2}$, P 間の距離を求める。 $\sqrt{(|\alpha|+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\alpha^2+|\alpha|}$

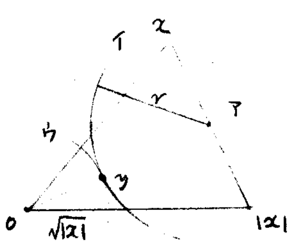
この半径で下図のように α を中心に円を描き $\frac{1+\alpha}{2}$ 中心半径 $\frac{1-\alpha}{2}$ の円との交点を Q とすれば Q は $\sqrt{\alpha}$ である。なぜなら $Q\alpha$ の長さは $\sqrt{\alpha^2+|\alpha|}$ $\alpha 0$ の長さは $|\alpha|$ 又 $\alpha 1$ の長さは $1+|\alpha|$ だから $\overline{\alpha 0}:\overline{\alpha Q}=|\alpha|:\sqrt{\alpha^2+|\alpha|}=\overline{\alpha Q}:\overline{\alpha 1}$



∴ $\triangle \alpha Q 0$ と $\triangle \alpha 1 Q$ は相似でしかも $\triangle \alpha 1 Q$ が直角三角形だから $\triangle \alpha Q 0$ も直角三角形で Q は虚軸上の点である。ピタゴラスの定理を適用すれば容易に $\overline{0Q}=\sqrt{|\alpha|}$ を得る。以上で α が負の時は作図可能であることがわかる。正の α に対しては $\alpha=-1\cdot(-\alpha)$ として各々の平方根を求めてから積の作図をすればよい。

ii α が複素数の時の $y^2=\alpha$ である y の作図

まず $|\alpha|^2=\alpha\bar{\alpha}$ は作図可能である i より $|\alpha|$ そして $\sqrt{|\alpha|}$ も作図可能である。次に α と $|\alpha|$ の中点 $\frac{\alpha+|\alpha|}{2}$ も作図する。$\left|\frac{\alpha+|\alpha|}{2}\right|$ も $\sqrt{|\alpha|}$ も作図可能だから $\left|\frac{\alpha+|\alpha|}{2}\right|-\sqrt{|\alpha|}$ もそうで、この半径で $\frac{\alpha+|\alpha|}{2}$ から円を描き原点中心半径 $\sqrt{|\alpha|}$ の円との接点を y とすれば $y^2=\alpha$ である。もう一つの根は $-y$ だから b により作図可能である。



69/9

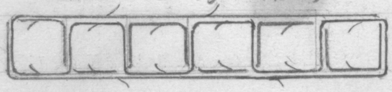
〜 2重の一筆書きについて ＜エレガントな解答の10月号第2問の拡張＞① 〜

○ 縦横無限本の碁盤の目の上に、直線にそって自ら交わらない折線領域をつくる。この領域の内及び境界からなる格子図形のある一点から出発し、うまく回ってきて どの線分もちょうど一往復して もとのところに最初出発した時と同じ向きにもどってくる時 この図形は性質(A)をもつということにする。

○ 以上の定義の上で、性質(A)をもたない図形は縦横 2×偶数本の形の長方形図形のみで、他はすべて(A)をもつ。

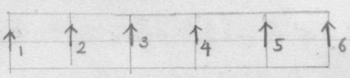
[証明] 回路の代表的な例：

(a)



左図は縦横 2×(奇数本)の場合の回路図である。(あとで利用する)

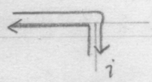
まず 2×(偶数本)の形の長方形が、(A)を持たないことを証明する。 左図のような



長方形図形の 6つの矢印に注目する。もし、この図形 2本×(偶数本)が(A)をもつならその回路の中に図の6つ(一般に2k)の矢印の部分があるはずである。その回路の通りに6つ(一般に2k)の矢印から上のT字路にぶつかり 反対向きの矢印になって もとの部分へもどってくるものとする。この時 縦線に図の矢印と同じ番号をふっておけば もどってくる状態を 6(2k)文字の置換が施されたものと考えることができる。

※ その時の置換は6(2k)項巡回置換である。

なぜなら、置換を巡回表現して 1のない巡回置換の中で1番大きい番号のものを i とする。すると i のT字路のところで左下図のような回路ができ $i<6(2k)$

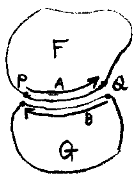


なら i のT字路の右側の横線でUターンしなければならないから不合理である。よって $i=6(2k)$ したがって 1の属する巡回置換のみで上の横線が2重に全部尽されてしまう。この巡回置換にもし属さないものがあれば それは今述べたことから Uターンする他ない これは仮定に反するから したがって すべての列の関与する巡回置換 つまり6(2k)項巡回置換でなければならないことがわかる。 下側向きにもどってきた矢印について同じことを下の横線について考えれば 下でも 6(2k)項巡回置換の後最初と同じ矢印の向きにもどる。この置換も最初の 1〜6 の矢印の置換の結果

と考えれば　6 (2k)項巡回置換2個の積だから偶置換であり　2k項巡回置換は奇置換だから　それは巡回置換ではない。これは仮定に反する。(なぜなら 2k項巡回置換でないと　矢印のうちの1つ例えば $\uparrow_1$ から出発してすべての矢印を回り尽くすことができない)　…… (2本)×(偶数本)の証明終わり。

………　(2本)×(偶数本)以外の形のものがすべて(A)をもつことを証明する前にいくつかの補題を証明する。

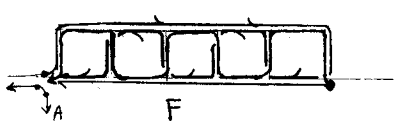
＊ 補題1，　2つの図形 F，G が (A)をもち左下図のようにこの2つをくっつけた時密着点で F，G に矢印のような回路があれば　そのくっつけた図形 F∪G も (A)をもつ。



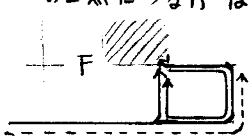
[証明]　点Qから矢印Aの続きの回路でFを回り尽くし　最後にPに来た時　Aを通ってQに行かず矢印Bの続きのGの回路に入る　Gの回路を回り尽くしQにもどって来れば今回った回路がF∪Gのそれに相当する。

系　この補題と最初にあげた　(2本)×(奇数本)の形の回路図からただちに　(奇数本)×(偶数本)の長方形図形が(A)をもつことがわかる。

＊ 補題2，　(A)をもつ図形Fと(2本)×(偶数本)の形の図形も上と同様にFに結合する線に沿った長い ⟵ の部分があれば　くっつけて(A)をもつ図形がつくられる。但しこの場合Fの方が少なくとも正方形1個　(2本)×(偶数本)の長方形よりはみ出ていることが必要である。



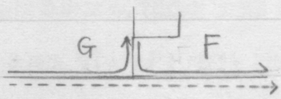
[証明]　左上図のようにFの長い矢印を赤い矢印のように変え且つ　(図はFが左側ででっぱった形)　左の角のところにやってくる矢線Aを切って　‥の2点につなげば求める回路を得る。

系　

左図のようにAをもつ図形Fに(2本)×(k本)の形の長方形はいつでもくっつけることができ　しかもFに ⟶ のような部分回路があれば　図のように回路を変更することにより ……↑ のような部分回路をもった回路がつくれる。(但しFは図の▨の部分をもっている必要がある)

[証明]　kが奇数のものは補題1　偶数のものは補題1，2より明か

* 補題3，　2つの(A)をもつ図形 F，G が小正方形の一辺でくっつく時

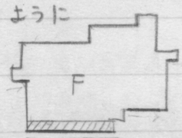


FUG は(A)をもち 特に F，G に矢印のように長い矢印が存在する時 FUG は ‥‥→ のような長い矢印をもつ。

［証明］ 補題1より明らか．

…… 以上の補題を用いて定理を図形の囲む単位正方形の個数に関する帰納法で証明する。 証明の都合上条件を少し強くして次の命題を証明する。

○ (2本)×(偶数本)の形以外の図形はすべて(A)をもつ。しかも 図形の下の辺 （例えば右図の赤線）では ⟶ のように直進できる。

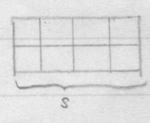


［証明］ F が 辺の長さ $1\times m$ の長方形の場合には上の命題は明らかである 面積が n より小さい図形に対して命題が成り立つと仮定する。面積 n の任意の図形 F が この仮定のもとで 命題を満たすことを証明する。図形Fの最下段の，辺の長さ $1\times k$，の長方形（上図の ▨）に注目する（1につもあれば そのうちの1つ）。この長方形の上にある部分を F′ とする。F′ が2つ以上の部分に分かれれば補題3より F は(A)をもつから F′ は連結としてよい。**

i) k が偶数の時（つまり(2本)×(奇数本)の形の図形）

F′ が (2本)×(偶数本)の形の図形でないなら 帰納法の仮定から F′ は(A)をもち しかも一番下の辺 つまり $1\times k$ の長方形との結合部分に補題1が適用できる回路があり，$1\times k$ の長方形の方も最初にあげた図 a より 補題1の適用できる回路がある。 よって F＝F′∪(長方形) は (A)をもつ。

F′ が (2本)×(偶数本)の形の図形なら (2本)×(k本)の長方形のでっぱりは 補題2の系より削って考えることができ， 結局下図のような場合のみを考えればよい，これは 補題1の系より (A)をもつ。☆次頁



ii) k が奇数の時（つまり (2本)×(偶数本)の形の図形）

F′ が (2本)×(偶数本)の形の図形なら i)の場合と全く同じ議論ができ F が(A)をもつことがわかる。

F′ が (2本)×(偶数本)の形の図形でない時は

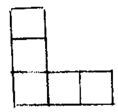
** 正確には F_1，F_2 等が(2本)×(偶数本)の場合も考慮して（省略） F が(A)をもつことがわかる。

a　F′の方がでっぱっている時 … この時は 補題2よりただちに Fが(A)をもつことがわかる。

b　1×kの長方形がでっぱっている時　この時は でっぱっている部分をなくし切って2つの図形にわけ それを F_1, F_2 (ただしF_2をでっぱっている方) とする。F_1が(A)をもつなら 補題1.2より ただちに Fは(A)をもつとわかる。

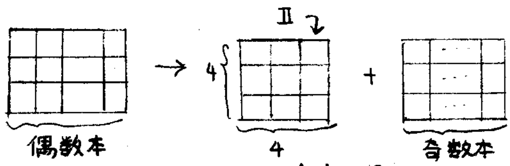
F_1が (2本)×(偶数本)の形の図形で F_2が (2本)×(奇数本)の時には 切る点を2つずらして 縦横に切断すれば下図のような図形になる。これについては後で考察する。

I



c.　1×k と F′が ぴったり合わさっている時, この時は 下の2段の長方形と Fの残りの部分F″を分ける。F″が(A)をもてば補題1とその系より ただちに Fが(A)をもつことがわかる。

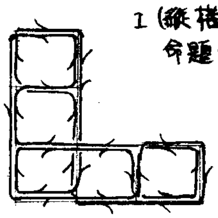
F″が (2本)×(偶数本)の図形なら 補題2の系から でっぱりも分けて



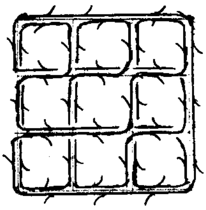
だから II だけ考えればよい。☆☆下記

d.　I 及び II の回路図

I (縦横ひっくり返せば命題を満たす)

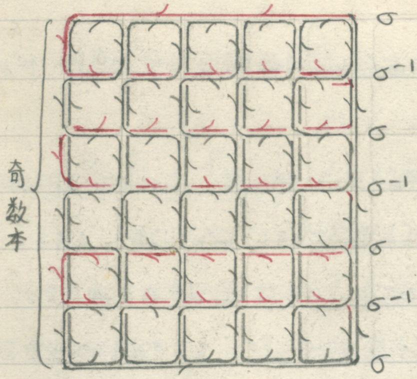


II

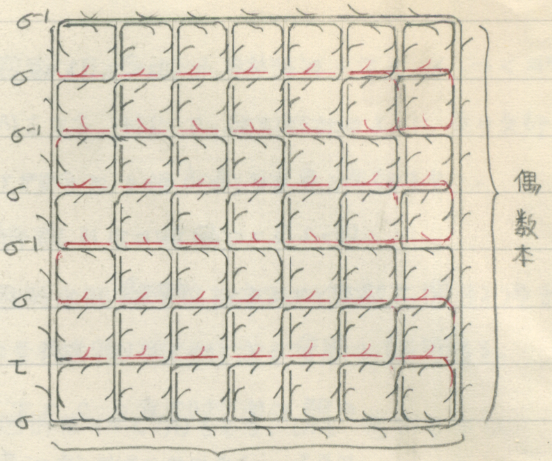


q.e.d.

☆や☆☆のところで下辺が直進できることも証明していない (☆☆では IIと家番できることを証明していない)　それで n×m の図形についての簡単な回路図を下にあげておく。(それらを使えば すぐに上のことがいえる)



(1)



偶数本 (2)

以上の回路のつくり方を簡単に言っておくと

(1) の方は　まず各列の一番下から　そのまま真直に上まで直進し左に一つ曲がり（端の点は　端から端まで行く）そのまま右左右左と曲がりもとにもどる。最初の段までもどってきた時には　ちょうど　1つ列がずれているから　その列で同じことを操り返す。（或は　(2本)×(偶数本)の時と同様に　列の置換で考えれば、置換 $(1\,2,\cdots,k)=\sigma$ と $(k,k-1,\cdots,2,1)=\sigma^{-1}$ を交互に操り返したもの（下る時）と考えられる。）

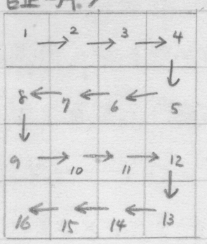
(2) の方は　列の置換で考えると　上と同じく　σ,σ^{-1} と　もう一つ　下から2番目の　$\tau=(1,3,4,\cdots,k)$ とにより説明できる。（一巡回の置換は
$\sigma\sigma^{-1}\sigma\sigma^{-1}\sigma\sigma^{-1}\sigma\tau=\sigma\tau=(1\,4\,6\,8\,2\,3\,5\,7)$ となる）

~ 15ゲームについて ~

○ 15ゲームである配列からある配列への移し変えが可能であるための必要十分条件を求める。

○ <結論> 穴が一番左下の隅にあるものだけで考えれば 最初の数字の配列 $1, 2, \cdots, 15$ の上にどの数字が後の数字の配列できているかを表わす置換を σ で表わせば σ が偶置換の時 最初の配列から後の配列へ変形可能 且つ 奇置換の時は不可能。左下隅に穴のないものは穴を移動してから判定する。(又は以下述べるようにこの時も σ だけで判定することも可能である)

○ <証明>



1つの配列が与えられたら左の図の矢印の順に数字を拾って行く(穴は飛ばす)。すると1つの配列に対し15個の数字の列 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{15}$ が得られる。今1つの配列Aを固定し これから移ることのできるすべての配列の集合をMとすれば、Aと同じ数字の列 $a_1, a_2, \cdots, a_{15}$ を持つ配列はMに属す。(Aと同じ数字の列をもつ配列は穴を上の図の矢印に沿って動かせばAと同じ位置に穴を持ってくることができ変形によってAと全く同じになる)

数列 $a_1, \cdots, a_{15}$ を数, 1~15の置換されたものと考える。Aと同じく同じ置換 σ に対応する配列は皆互いに変形で移り変わる。従って以下1つの置換 σ から他の置換 τ へ変形を通じて移り変われるかどうかを問題にする。置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 15 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{15} \end{pmatrix}$ から直接移れる置換をすべて挙げると

$\alpha_1 = \sigma(1234567)$, $\sigma(7654321)$,

$\alpha_2 = \sigma(23456)$, $\sigma(65432)$,

$\alpha_3 = \sigma(345)$, $\sigma(543)$,

$\alpha_4 = \sigma(789)$, $\sigma(987)$,

$\alpha_5 = \sigma(6\ 7\ 8\ 9\ 10)$, $\sigma(10\ 9\ 8\ 7\ 6)$,

$\alpha_6 = \sigma\ (5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11)$, 　　$\sigma(11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5)$,

$\alpha_7 = \sigma\ (9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15)$, 　　$\sigma(15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9)$,

$\alpha_8 = \sigma\ (10\ 11\ 12\ 13\ 14)$, 　$\alpha_9 = \sigma(11\ 12\ 13)$,

$\sigma\ (14\ 13\ 12\ 11\ 10)$, 　　$\sigma(13\ 12\ 11)$, 　　(A)

これらの置換をτとすれば　τはσと奇偶が同じである。

配列Aからτの表わす配列Bへの置換は

$$\sigma(5\,6\,7\,8\,9\,10\,11)\,\sigma^{-1}\quad \text{etc}, \qquad \text{(B)}$$

だから明らかに偶置換である。これで必要条件が証明された。

(穴の位置の違っているものどうしの比較は穴をそろえてから行なってもよいし配列を15項の置換に写しとれば その必要もない)

* 次にこれが十分条件であることを証明する。(A)を繰り返し使った置換は(B)の要素を乗じ合わせたものに左からσを乗じたものに対応する。従って　(B)の要素を乗じ合わせたものが　対称群 S_{15} の部分群である交代群 A_{15} になることがいえればよい。

更に(B)が交代群 A_{15} であることを言うには $\alpha_1, \cdots, \alpha_9$ の左のσを除いた置換を $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_9$ とすれば $\beta_1, \cdots, \beta_9$ が生成する群が A_{15} であることを言えばよい。(なぜなら $\beta_1, \cdots, \beta_9$ が生成する群が A_{15} なら (B)のつくる群は $\sigma A_{15} \sigma^{-1}$ で A_{15} は S_{15} の正規部分群だからこれが A_{15} になる)

$\beta_1, \cdots, \beta_9$ が A_{15} を生成することを証明するには 任意の i に対して $(1\ 2\ i)$ を $\beta_1, \cdots, \beta_9$ を乗除してつくることができればよい。

i)
$$
\begin{aligned}
(1\ 2\ 3) &= \alpha_1^{-2}\alpha_3\,\alpha_1^{2}\\
(1\ 2\ 4) &= \alpha_3\,(1\ 2\ 3)\,\alpha_3^{-1}\\
(1\ 2\ 5) &= \alpha_3\,(1\ 2\ 4)\,\alpha_3^{-1}\\
(1\ 2\ 7) &= \alpha_1\alpha_2^{-1}\\
(1\ 2\ 6) &= \alpha_1^{-1}\alpha_2\alpha_1\alpha_2^{-1}\\
(1\ 2\ 8) &= \alpha_4\,(1\ 2\ 7)\,\alpha_4^{-1}
\end{aligned}
$$

ii) $(1\ 2\ i) = \alpha_7\,(1\ 2\ i-1)\,\alpha_7^{-1} \quad (i \geqq 9)$

より　(B) は A_{15} を生成することがわかる。　q.e.d.

＊ 簡単な判定法

1つの配列 A から別の配列 B へ移せるかどうかを判定するには Aの置換 σ と Bの置換 τ の奇偶を調べると早い。(奇偶は置換の転移数等で直ちにわかる．下の例参照)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	

左の2つは相互に移り変わることができる 両方とも奇置換である。

転移数

$3+2+1+2+1=9$.

転移数

$3+6+9+9+6+3+1+2+3+2+1=45$

＊ 全く同様に $n \times m$ のマスに対しても同じことが証明される。(但し $n, m \geqq 2$)

~問 題~

1. 数列

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-i)\,i}} \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

の収束の様子を調べる（単調増加？）

2. $f(x, y)$, $g(x, y)$ を x, y の多項式とする時

$$\lim_{x, y \to 0} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \qquad (\text{但し } f(0,0) = g(0,0) = 0)$$

を求めるアルゴリズムはないか？

3. n-円分体で素因子分解の一意性が成り立てば

$$x^n + y^n = z^n \qquad xyz \neq 0, \quad n \geqq 3$$

を満たす有理整数 x, y, z が存在しないことが簡単に証明できないか？

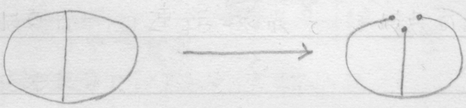
4. 2重の一筆書きの問題（数学セミナーの問題）を一般な線系に拡張した時どうなるか？

～2重1筆書きについて②～

- 点と点を結ぶ線分(曲線)を'枝'　n本枝の出ている点を'n岐点'ということにする。
- 一般の線系(連結でなくともよい)が各連結部分について　1岐点以外ではUターンすることなく一巡ですべての枝を往復し尽せる時，完全巡回路をもつという。

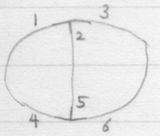
A.　連結線系が完全巡回路を持つことは，規則'他の岐点では制限はないが3岐点では3つの1岐点に切断する'に従って線系を切断し，閉じていない連結線系に変形できることと同値である。

(例)



B.　連結線系の各枝の両端に適当に番号をふる。この時　この線系が完全巡回路を持つことと，$\sigma\tau=$(巡回置換)　(但し $\sigma=(i_1\ i_2)\cdots(i_{2s-1}\ i_{2s})$
<$i_{2p-1}\ i_{2p}$ は1つの枝の両端にふられた数字>　$\tau=(I_1)(I_2)\cdots(I_m)$
<I_p は1つの岐点に集ってくる枝の番号のみの推移的な置換>)　となるような置換τが存在することは同値である。

(例)



$\sigma=(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$

$I_1=\{1,2,3\}$，$I_2=\{4,5,6\}$，

$(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)\ (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)=(1\ 5\ 3\ 4\ 2\ 6)$

完全巡回路：$1\to5\to3\to4\to2\to6$

<Aの証明>　a. 十分条件であること……変形で得られた閉じていない線系Γ'は明らかに完全巡回路をもつから，この巡回路を利用して　もとの線系Γの完全巡回路をつくる。
Γ'の完全巡回路はΓでは，Uターンを許した巡回路になるから　次のことを言えばよい。
* 1つの岐点に集って来る枝にUターンがあれば　他の岐点での進み方を変えずにその点でUターンのない別の進み方を行ない　新しい回路がつくれる。

但し 3岐点では Uターンが 3つのものだけを示せばよい。

*の証明…Pの岐点に集ってくる枝は適当に番号づけ 1, 2, 3, …, n とする。回路に沿って「どの枝から入って来たものが どの枝に出ていくか」「どの枝から出ていったものが、一番最初に どの枝に もどってくるか」を表わす置換を それぞれ σ, τ とする。(前者を内置換、後者を外置換ということにする)この時 τ は変えずに(つまり注目している岐点以外の進み方は変えずに)$\sigma\tau = \rho$ (但し ρ はn項巡回置換) となる推移的な(つまりUターンがない)置換 σ がある。これは 例えば τ^{-1} の巡回表示を

$$\tau^{-1} = (I_{11}) \cdots (I_{1k_1})(I_{21}) \cdots (I_{2k_2}) \cdots (I_{m1}) \cdots (I_{mk_m})$$

とし (但し I_{ps} は p 項巡回置換)

$$\sigma = (I_{21}' \cdots I_{2k_2}' \; I_p' \; I_{21}'' \cdots I_{2k_2}'' \; J)\tau^{-1}$$

とすればよい。但 I_{2j}', I_{2j}'' は互換 (I_{2j}) の2数であり I_p' は I_{ps} $(p \neq 2)$ に含まれる1数 又 J は以上の残り全部である。

b. 必要条件であること… 連結線系 Γ が完全巡回路をもつとする。外置換 $\tau = (I_1)(I_2) \cdots (I_m)(i_1) \cdots (i_p)$; ($(I_s)$ は2項以上の巡回置換 i_s は数) をそのままにして 内置換を

$$\sigma = (I_1' I_2')(I_2'' I_3') \cdots (I_{m-1}'')(I_m')(I_m'' \; i_1 \; i_2 \cdots i_p)$$

(I_p', I_p'' は巡回置換(I_p)の両端の数)

と変えれば $\{I_p\} \neq \phi$ ならば(つまり τ が恒等置換でない限り) Uターンの枝が生じ その枝を切断することができる。したがって $\{I_p\} = \phi$ の場合 線系が閉じていないことを言えばよい。 もし線系が閉じているなら、適当な岐点、Pを取ると そのうちの 2つの枝 例えば 1と2が 先の方でつながっている。 Pの 1の枝から出発すれば、仮定から 一番先に 1の枝へもどってくる。 この回路 $1 \longrightarrow 1$ を C とする。 C は次のような性質をもつ。 Cが1点 Q を通るなら Q から出る枝は往復とも Cに含まれる。 したがって又 Q と隣り合う岐点はすべて C に含まれる。 <帰納法を使う。 Qの手前に C が R を通るなら 仮定より $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RQ}$ は共に C に含まれている。 Qの内置換を $(1\,2 \cdots n)$ 又 $RQ = n$ として一般性を失わ

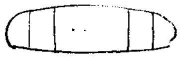
ない。　$\overrightarrow{{}_n\alpha}, \overrightarrow{\alpha_n} \in C$ より直ちに $\overrightarrow{{}_1\alpha}, \overrightarrow{\alpha_1} \in C$ となる＞

（∵ 回路が $\overrightarrow{{}_n\alpha} \to \overrightarrow{\alpha_1} \to \overrightarrow{{}_1\alpha} \to \overrightarrow{\alpha_2} \to \cdots \to \overrightarrow{{}_{n-1}\alpha} \to \overrightarrow{\alpha_n}$
と進み　両端が C に属することから言える。）

もし 1と2 が先の方で　つながっているなら　これから　$2 \in C$ がいえ　これは
C の定義に矛盾する。

＜Bの証明＞　Aの証明中の内置換、外置換の関係より明らか。

系 1　連結線系 Γ の枝のうち両端の点が共に3岐点であるようなものからなる線系を
A（連結でなくともよい）とする。$\Gamma \supset B \supset A$ を満たす線系 B（連結でなく
ともよい）があって　Bが完全巡回路をもつなら　Γ も又完全巡回路をもつ。
特に
a.　$A = \phi$ の時　Γ は完全巡回路をもつ
b.　A が完全巡回路をもつ時　Γ は完全巡回路をもつ。

系 2.　　（3岐点の数 2 mod 4）は完全巡回路をもつ。

系 3.　2,3 岐点ばかりの連結線系で、3岐点の数が4の倍数なら その線系は
完全巡回路を持たない。
（証明）　B に sgm を取る。

系 4.　碁盤の目の上のマスに合わせて　正方形を積み合わせた図形のもつ線系は、正方
形を1列に奇数個並べたもの以外は完全巡回路をもつ。穴があっても差しつかえない。
（→ 2重1筆書き① p.8）

〜 実代数曲線の孤立点について 〜

○ 多項式 $P(x, y)$ の零点集合 $V(P)$ の1点 S が孤立点か否か判定する条件を考える。…… これは $P(x, y)$ が S を極点にもつかどうかという問題とも一致する。（以下 S は $(0, 0)$ として考える）

実代数曲線の一般論から次のことを用いる。（Milnor, 'singular point of complex hypersurface'）

* 点 S が 代数曲線 C の孤立点でなければ、C は点 S で 実線分 $[0, 1]$ に homeomorphic な いくつかの、原点を除いて 互いに共通点のない 枝に分かれ C が y 軸に含まれないなら

$$\begin{cases} x - x_0 = \pm t^{\mu} \\ y - y_0 = f(t) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} S = (x_0, y_0) \\ \mu \geq 1 \ \text{integer} \\ f(t) : t \text{ の実解析関数} \end{array} \right.$$

と parametrize できる。

Def ＜ $P(x, y)$ の Newton 多角形 ＞
P にでてくる 零でない係数をもつ 各単項 $x^m y^n$ の 指数 (m, n) を xy-平面 に プロットしてできる点集合の 凸包。

Def ＜ weight (α, β) の minimal part ＞ $\alpha, \beta \geq 0$ integer
P にでてくる 単項（係数 $\neq 0$）の中で $\alpha m + \beta n$ を最小にする 項全体のつくる多項式 $M_{\alpha\beta}(x, y)$
＜ weight (α, β) の minimal 多項式 ＞
$$m^{+}_{\alpha\beta}(t) = M_{\alpha\beta}(1, t), \quad m^{-}_{\alpha\beta}(t) = M_{\alpha\beta}(-1, t)$$
の2つ。

* 次のことが成り立つ。

◎ 原点が孤立点なら すべての α, β に対して $m^{\pm}_{\alpha\beta}(t)$ は 弱い意味で定符号
逆に すべての α, β に対して $\underbrace{m^{\pm}_{\alpha\beta}(t)}_{R-\{0\}}$ が 強い意味で 定符号なら 原点は 孤立している。

Remark.　（弱い意味で定符号…0を含めた意味．強い意味で定符号…0を含めない）

i)　必要条件の方は実はもう少し強い形，$m^{\pm}_{\alpha\beta}(t)$ を $M_{\alpha\beta}(x,y)$ に置きかえても成り立つ。

ii)　'すべての…定符号' の意味は $m^{\pm}_{\alpha,\beta}$ がすべて同じ符号（α,βに関係なく）であるという強い意味である。

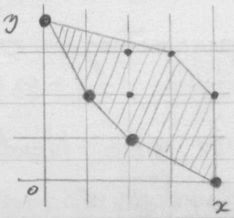
iii)　十分条件の方は '$P_{xy}^2(0) - P_{xx}(0)P_{yy}(0) < 0$ なら孤立' という事実を含んでいる。

iv)　すべての α,β についてためす必要はない。PのNewton多角形を書いた時 その第3象限部分（左下部分）の辺，頂点について

a)　頂点を表わす単項式が定符号かどうか？

b)　辺を表わす多項式が定符号かどうか？

を確かめればよい。



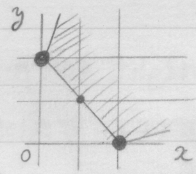
$$\left[\begin{array}{l} x^4+x^2y+yx^2 \\ +y^4+x^2y^2+x^2y^3 \\ +x^4y^2+x^3y^3 \\ +x^2y^3 \end{array}\right]$$

（右の例では）

a)　$x^4,\ y^4,\ xy^2,\ x^2y$,

b)　$xy^2+x^2y,\ x^4+x^2y,\ y^4+xy^2$,

（但し頂点とはNewton多角形の境界の曲がっている点　したがって次の(1,1)は頂点に入らない）



$x^2+xy+y^2+\cdots\cdots$

v)　特にNewton多角形の第3象限部分で，辺の中に点がない時は上の a)と頂点を表わしている項の係数が定符号かどうかを調べればよい。

vi)　孤立点であるかどうかは双有理不変だから，Pで判定できない時はPを双有理変換するとよい。この時 v)の条件に近くもっていった方が判定しやすい。

◎の証明　$x=t^{\alpha},\ y=t^{\beta}(b_0+b_1t+\cdots)$　$b_0\neq 0$

を $P(x,y)$ に代入すると t の次数最低の項は

$m^{+}_{\alpha,\beta}(b_0)t^s$

となり ベキ級数展開の unique 性から $m^{\pm}_{\alpha,\beta}(b_0)=0$

これは仮定からおこりえないから ($m^{\pm}_{\alpha,\beta}$ は $t\neq 0$ で非零)

最初の parametrization は不可能。故に原点は孤立 (十分条件)

(必要十分) もし $M_{\alpha\beta}(a,b)<0$, $M_{\gamma\delta}(a',b')>0$

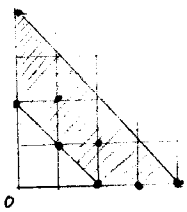
なら $x=at^{\alpha}$, $y=bt^{\beta}$; $x=a't^{\gamma}$, $y=b't^{\delta}$

を代入した時 前者は local に $P(x,y)\sim M_{\alpha\beta}(a\,b)\,t^{s}$

後者は $P(x,y)\sim M_{\gamma\delta}(a',b')\,t^{s'}$ だから $0<t<\varepsilon$ で

両者は異なる符号を有する。したがって原点は孤立していない。

(Example) 1年の微積の試験問題 …… (この考察の発端)



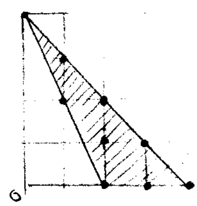
$$P=x^2+y^2+2xy+x(x+y)(x+3y)+x^4+y^4$$

$$M_{1,1}=x^2+y^2+2xy\geq 0$$

$$m^{\pm}_{1,1}=1\pm 2t+t^2\geq 0$$

このままでは判定できない。 $u=x+y$, $v=y$

と変換すると



$$\tilde{P}=u^2+u(u-v)(u+2v)+(u-v)^4+v^4$$

$$M_{2,1}=u^2-2uv^2+2v^4=(u-v^2)^2+v^2>0$$

$$m^{\pm}_{\alpha\beta}>0 \quad (\text{in } R^2-0)\quad \forall\alpha,\beta$$

故に $P(x,y)=0$ は原点が孤立している

71/6

～一筆書きの一般化～

◎　(r,s)型，(r)型　一筆書きの定義

(r,s)型回路…　線系の各辺を一方の向きにr回　逆の向きにs回通るように（一岐点以外では）Uターンすることなく全体を一巡で回り切るような回路　（$r \leqq s$ として一般性を失なわない）

(r)型回路　…　向きに無関係にただr回各辺を通るUターンのない回路

次の結果を得る

［(a)の？については4,6参照］

r ＼ 型	(r,s): $r=s$	(r,s): $r<s$	(r)
$r=0$	／	(c) E	／
$r=1$	(a) ？	(d)	(e) E
$r\geqq 2$ 偶	(b)	$E\cap\Omega^*$	(f) Ω
$r\geqq 2$ 奇	Ω^*		(g) E

☆但 Ω　連結線系全体
　　Ω^*　$\Omega-\{S'\}$
　　E　偶岐点のみのもの

［証明］　(c)(e)(g) の証明は通常の一筆書きの場合に同じなので省略

(f)で $r \geqq 4$ のものは $r=\frac{r}{2}+\frac{r}{2}$，$(\frac{r}{2},\frac{r}{2})$型を利用できるから　(b)がいえればよい。したがって証明を要するのは

(b)，(d)，(f) $r=2$，の3つでよい。

＊　(d)の証明

まず E の線系は必ず $(0,1)$型の回路をもち，且つ S'を除くと$(1,1)$型の回路をもつことは明らかで，これらの回路を組み合わせれば任意の(r,s)回路を得るから

(d) ⊃ $E\cap\Omega^*$　である。

故に (d) ⊂ $E\cap\Omega^*$　即ち (d) ⊂ E をいえばよい。

(d)の線系を任意に一つとる　Pに向かう方向を fix して

Pから出ている枝を (r,s)と(s,r)型に分ければ，流入する向きのついた枝数と流出する向きのついた枝数が等しいから

それぞれの本数をλ, μとして、

$$\lambda r+\mu s=\mu r+\lambda s \quad \Rightarrow \quad \lambda(r-s)=\mu(r-s)$$

$r \neq s$ だから $\lambda=\mu$ 即ち P は $\lambda+\mu=2\lambda$ 岐点 即ち偶岐点

∴ (d)⊂E である

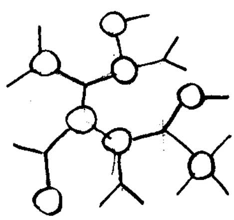
* (b) の証明 (b)⊃Ω^* を示せばよい

3岐点のみからなる線系に対していえば十分である。

連結(3岐点)線系にUターンを許した (r, r) 回路があるとする。

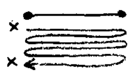
この時 1つの岐点に $3r$ コのUターンが集っているなら このUターンを消去することができる。(∵ 3つの(1, 1)回路が重なったものとみなして(1, 1)回路の手法を3度用いる) 故にこの構成法を座に適用すれば、次のような閉じていない線系に s' が何個かはまったものについて(b)をいえばよい。(任意の線系は3岐点切断の手法でこのような線系に reduce できる)

(α)



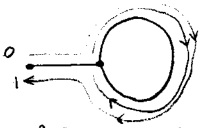
これには下図の回路をつなぎ合わせればよい

(ア)



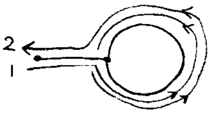
(r回往復)

(イ)



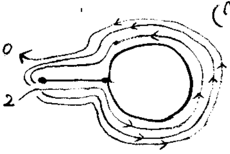
(r回回転)

(ウ)



(2回逆転)

(エ)



($r-2$回逆転)

* (f) $r=2$ の証明

(b)の証明と同様に3つのUターンの消去ができ(α)のような図形に対してのみ (f) $r=2$ を示せばよい。これには(ア)の $r=1$ 及び(ウ)を組み合わせればよい。

72/7

～直方体の箱詰めについて～

◎ たて横高さ a,b,c（自然数）の直方体を積み重ねて立方体をつくるとする。

この時 直方体の置き方は任意とする。

[定理] (a,b,c) 直方体で立方体 T が埋められる

$\Leftrightarrow$ Tの一辺の長さは (a,b,c) の公倍数

∵) $\Leftarrow$ は明らかである。

$\Rightarrow$ は次の reduction が可能

◎ reduction 1. 各直方体の面はTの面と平行、しかもどの頂点も Tの単位立方体の頂点からなる格子点に位置しているとしてよい。

◎ reduction 2. $(a,1,1)$型の直方体について定理を示せば良い

∵) (a,b,c) 直方体で T が組み立てられているとする。各直方体を bc個の $(a,1,1)$型直方体に細分する。もし $(a,1,1)$ について定理が成り立っているなら、これから Tの一辺は aの倍数、同様にして b,c の倍数にもなる。これから定理は直ちに得られる。

[定理の証明] T が $(a,1,1)$型直方体を重ねて出来ているとする。

$a=1$ の時は問題ないから $a>1$ とする。Tの1辺の長さを l としTの単位立方体を端から3つの座標 (p,q,r) $0 \leqq p,q,r \leqq l-1$ をいれて表示する。この立方体群を $p+q+r \bmod a$ で同値類に分ける。$(a,1,1)$型の直方体がTのどこに位置していても、それに属する立方体は $(p,q,r),(p+1,q,r),\cdots,(p+a-1,q,r) \bmod a$

$(p,q,r)\ (p,q+1,r) \cdots (p,q+a-1,r) \bmod a$

$(p,q,r)\ (p,q,r+1) \cdots (p,q,r+a-1) \bmod a$

の a個で各類から丁度一個ずつ取ったものである。したがって Tが $(a,1,1)$ 直方体で埋まるなら Tの単位立方体群の各類は同数の

立方体を含む。　これが　$a \mid l$ の時に限ることを証明する。

$$l = \alpha a + |c| \qquad 0 \leqq |c| \leqq \frac{a}{2}$$

とおく。　まず　$0 \leqq c \leqq \frac{a}{2}$　とする。

T　を4つの直方体

$$(\alpha a, l, l) \quad (c, \alpha a, l) \quad (c, c, \alpha a), \quad (c, c, c)$$

に分ける。　はじめの3つは a の倍数の辺を含むから各類同数

故に最後の　(c, c, c) について調べれば良い。

（ $c<0$ の時は　直方体を引くだけで　上と同様にに　$(|c|, |c|, |c|)$ に帰着 ）

故に最初から $l = c$　$0 \leqq c \leqq \frac{a}{2}$　として良い。　$c \neq 0$ の時、各類同数にならないことを証明する。　類 $\{(p, q, r)\}$

$$p + q + r \equiv 2c - 2 \mod a \qquad (0 \leqq p, q, r \leqq c-1)$$

の個数を数える　$0 < c \leqq \frac{a}{2}$　に注意すれば　これは

$$p + q + r = 2c - 2 \qquad (0 \leqq p, q, r \leqq c-1)$$

となる　組 (p, q, r) の個数である。　$q' = c-1-q$, $r' = c-1-r$

とおきかえれば

$$p = q' + r' \qquad (0 \leqq p, q', r' \leqq c-1)$$

この個数は　$c + (c-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{c(c+1)}{2}$　個。　もし

各類同数なら

$$\frac{c(c+1)}{2} \cdot a = c^3$$

$$(c+1)a = 2c^2$$

$c+1$ と c は素だから　$c+1 \mid 2$　i.e.　$c = 1$

$c = 1$　なら　$a = 1$　$a > 1$ より矛盾　i.e.　各類同数でない。

Q.E.D.

73/1

〜 続 直方体の箱詰めについて 〜

◎　たて 横 高さ　a_1, a_2, a_3（自然数）の直方体を積み重ねて更に大きな直方体をつくるとする。ただし 直方体の置き方は任意だが 内部に空洞があってはならないとする。

［定理］　ある自然数 N があって 3辺が N より大なら　次の2つの条件が 大きな直方体が ◎ を満たす必要十分条件になる。（その3辺を $A_1, A_2, A_3 > N$ とする）

I）　$\forall i, \exists j \quad a_i | A_j$

II）　$\forall i, j \ (i \neq j) \ \exists k, l \ (k \neq l) \quad (a_i, a_j) | (A_k, A_l)$

但し (x, y) は x, y の最大公約数。

III）　$\forall$　$(a_1, a_2, a_3) | (A_1 A_2 A_3)$

（注意 1）　$M_1 = \{x | x = \lambda a_2 + \mu a_3, \ \lambda, \mu \geqq 0\}$　$M_3 = \{x | x = \lambda a_1 + \mu a_2, \ \lambda, \mu \geqq 0\}$

$M_2 = \{x | x = \lambda a_1 + \mu a_3, \ \lambda, \mu \geqq 0\}$　$M_0 = \{x | x = \lambda a_1 + \mu a_2 + \rho a_3, \ \lambda, \mu, \rho \geqq 0\}$

$M_1' = (a_2, a_3)\mathbb{N} - M_1$,　$M_2' = (a_1, a_3)\mathbb{N} - M_2$,　$M_3' = (a_1, a_2)\mathbb{N} - M_3$

$M_0' = (a_1, a_2, a_3)\mathbb{N} - M_0$　　$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

とおけば　$N = \mathrm{Max}(M_1', M_2', M_3', M_0') \leqq [a_1, a_2] + [a_2, a_3] + [a_3, a_1]$ ととれる。

（$[\alpha, \beta]$ は α, β の最小公倍数）

（注意 2）　すべての辺を (a_1, a_2, a_3) でわっても問題の本質はかわらない。

したがって 自明な III の条件は省いて考える。

（定理の条件の必要性）

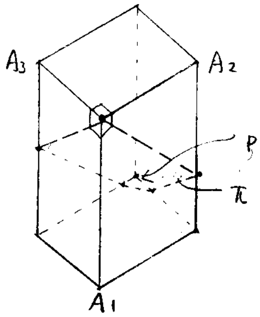
（必要性は N に関係なく言える）

I）　前題にならって (A_1, A_2, A_3) 直方体の単位立方体に 3つの座標 (x, y, z) $(0 \leqq x \leqq A_1 - 1, \ 0 \leqq y \leqq A_2 - 1, \ 0 \leqq z \leqq A_3 - 1)$ を入れ、　$x + y + z$ を $\mathrm{mod}\ a_1$ におとし この剰余類で各立方体を類別する。前題と同様"この各類の個数がすべて同じ"が $a_1 \nmid A_1$, $a_1 \nmid A_2$, $a_1 \nmid A_3$ の時おこらないことが示せれば良い。即ち次の Lemma がいえれば良い。

Lemma 1. $a_1 \nmid A_1$, $a_1 \nmid A_2$, $a_1 \nmid A_3$ ⇒ "各類の立方体の個数が同じ" でない。

∵）　前題同様　$0 < A_1, A_2, A_3 \leqq \frac{a_1}{2}$　　$A_1 \geqq A_2 \geqq A_3$

また必要なら類別の座標を入れかえて　左のような平行四辺形内の立方体を同じ類にすることができる。



今の π の位置から　この平行四辺形（角が欠けているが）を1つずつ上にあげて行く。裏の3つの面では
P を通過する前　$+1$　P を通過してから A_3 まで 0
A_3 を通過してから A_2 まで -1　A_2 から後　-2
一方 表の3面では　ずっと最後まで -1 の変化をする。したがって 途中で必ず類の個数の違う所がでて来る。（A_2 までいっても同じ類のものはすべて平行四辺形におさまる）

あまりよくわからなかったが 結果は合っている

したがって Lemma 1 が成り立つ。　　q.e.d.

II)　$C_3=(a_1,a_2)$ とおく。　もし A_1,A_2,A_3 のうちの2つ A_1,A_2 が C_3 の倍数でないなら　長方形 (A_1,A_2) を　上の Lemma にならって単位正方形類別したものは各類同数でない。直方体 (A_1,A_2,A_3) の一つの面 (A_1,A_2) は長方形 (a_1,a_2), (a_2,a_3), (a_3,a_1) で埋め尽されているはずであるが　このどの長方形も各類同数個ずつの単位正方形を含むから、上の仮定と矛盾する。　したがって　C_3 の倍数でないものは高々1つであり残りの2辺の最大公約数は C_3 の倍数となる。
$C_1=(a_2,a_3)$,　$C_2=(a_1,a_3)$ の場合も同様

（定理の条件の十分性）

$$\begin{cases} a_1=b_1c_2c_3, \quad a_2=b_2c_1c_3, \quad a_3=b_3c_1c_2 \\ (a_1,a_2)=c_3, \quad (a_2,a_3)=c_1, \quad (a_3,a_1)=c_2 \end{cases}$$

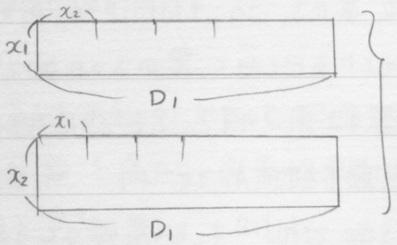
と各 a_i を分解する。　$\left((a_1,a_2,a_3)=1 \right)$

Lemma 2　　2辺 (x_1,x_2) の長方形を敷きつめて 2辺 (D_1,D_2) の長方形ができるための必要十分条件は　$\forall i, \exists j \; x_i \mid D_j$, & $\exists \lambda_j, \mu_j \geqq 0$ $D_j=\lambda_j x_1+\mu_j x_2$

証明）　必要であることは上と同じような方法でわかる。

十分であることは、 $x_1, x_2 | D_1$ の時をみれば良い。この時

$D_2 = \lambda x_1 + \mu x_2$ として



のような2つの長方形を縦に λ, μ 個はり合わせれば良い。

q.e.d.

(注意3) 上の後の条件は D_1, D_2 に $D_i > \mathrm{Sup}\left((x_1, x_2)\mathrm{ND} - \{x | x = \lambda x_1 + \mu x_2, \lambda, \mu \geqq 0\}\right)$ の条件をあらかじめつけておけば $(x_1, x_2) | (D_1, D_2)$ だけで良い。

* さて定理の条件 I, II は次の i) 〜 v) に分けることができる。

i) a_1, a_2, a_3 が各々異なった A_1, A_2, A_3 をわる場合

ii) $a_2, a_3 | A_1$; $a_1 | A_2$ で $(a_2, a_3) | A_3$

iii) $a_2, a_3 | A_1$; $a_1 | A_2$ で $(a_2, a_3) | A_2$

iv) $a_1, a_2, a_3 | A_1$; $(a_3, a_1) | A_2$, $(a_1, a_2)\ (a_2, a_3) | A_3$

v) $a_1, a_2, a_3 | A_1$; $(a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_1, a_2) | A_2$

この5つの場合に具体的に積み重ね方を示す。

i) の場合: この場合は自明である。

ii) の場合: (A_1, A_3) は (a_2, a_3) で埋め尽されるから(∵Lemma 2)、(A_1, A_3, a_1) (a_2, a_3, a_1) で埋め尽される。(∵ a_1 の厚みをつけただけ)

これを a_1 が A_2 になるまで $(a_1 | A_2)$ 積み重ねれば (A_1, A_3, A_2) ができる。

iii) の場合: $A_3 = \lambda a_1 + \mu a_2 + \delta a_3$ とし $A_3' = \mu a_2 + \delta a_3$ とする。 すると

$(A_1, A_2, A_3) = (A_1, A_2, A_3') + (A_1, A_2, \lambda a_1) = (A_1, A_2, A_3') + \lambda (A_1, A_2, a_1)$

でこの最初のものは ii)、後のものは ii) で A_2 と A_3 を入れかえたものになる。

から組み合わせれば良い。

iv) の場合: $A_2 = \lambda a_1 + \mu a_3$ とすれば

$(A_1, A_2, A_3) = (A_1, \lambda a_1, A_3) + (A_1, \mu a_3, A_3)$ でこの前者はそのまま ii) 後者は a_1 と a_3 を入れかえて ii) の場合に帰着できるから

これらを組み合わせれば良い。

v) の場合　　$A_3 = \lambda a_1 + \mu a_2 + \delta a_3$,　$A_3' = \mu a_1 + \delta a_3$　とおく。

$(A_1, A_2, A_3) = (A_1, A_2, A_3') + (A_1, A_2, \mu a_2)$

で　この前者は A_2 に A_3' を入れかえて iv)　後者は a_2 と a_1, A_2 と μa_2 を入れかえて ii) にそれぞれ帰着できるからこれらを組み合わせれば良い。

(注意1) で述べた N をとっておけば 上の i) 〜 v) の積み重ねはいつでも可能

q.e.d.

(注意1) の評価　$\leqq [a_1, a_2] + [a_2, a_3] + [a_3, a_1]$　は以下の通り。

$N = [a_1, a_2] + [a_2, a_3] + [a_3, a_1]$　ととる

i)　$A \geqq N$, $(a_1, a_2) | A$　$\Rightarrow$　$\exists \lambda, \mu \geqq 0$　$A = \lambda a_1 + \mu a_2$

∵　$A = u a_1 + v a_2$　　$u, v \in \mathbb{Z}$ という表示はある。　$u, v \geqq 0$ なら

いし　$u \geqq 0$, $v < 0$ なら　仮定から　$u \geqq \frac{[a_1, a_2]}{a_1}$,　$u - \frac{[a_1, a_2]}{a_1}$ を $u' \geqq 0$,　$v + \frac{[a_1, a_2]}{a_2}$ を v' とおけば　$A = u' a_1 + v' a_2$　$u > u' \geqq 0$

$v' < 0$ なら この操作をくり返す。いつかは $v' \geqq 0$ になる。その時の u', v' を λ, μ とする。

ii)　$A \geqq N$,　$\Rightarrow$　$\exists \lambda, \mu, \delta \geqq 0$　$A = \lambda a_1 + \mu a_2 + \delta a_3$

∵　$A = u a_1 + v a_2 + w a_3$　$u, v, w \in \mathbb{Z}$ という表示はある。　$u, v, w \geqq 0$ なら o.k.　$u \geqq 0$, $v \leqq 0$, $w \leqq 0$ なら　上と同様　$u \geqq \frac{[a_1, a_3]}{a_1} + \frac{[a_1, a_2]}{a_1}$ で 同じように reduction できる。　$u \geqq 0$, $v \geqq 0$, $w \leqq 0$ なる u, v の どちらか一方は　$\frac{[a_1, a_3]}{a_1}$, $\frac{[a_2, a_3]}{a_2}$　以上 (∵ $u < \frac{[a_1, a_3]}{a_1}$, $v < \frac{[a_2, a_3]}{a_2}$ なら $A < [a_1, a_3] + [a_2, a_3]$) だから i) と同じように reduction できる。

q.e.d.

(注意4)　「長方形の場合のように条件 $\forall i\ \exists \lambda_i, \mu_i, \delta_i$　$A_i = \lambda_i a_1 + \mu_i a_2 + \delta_i a_3$ をつけて N に関する条件を省く」 は言えない。

(反例)　$(a_1, a_2, a_3) = (1, 5, 7)$　　$(A_1, A_2, A_3) = (1, 13, 35)$

73/3

~ 続続 直方体の箱詰めについて ~

◎ たて・横・高さが自然数と限らない時 前題はどうなるか。

[定理] ① $\dim_{\mathbb{Q}}\langle a_1,a_2,a_3\rangle = 3$ の時： 箱詰め可能 $\Longleftrightarrow$ A_1,A_2,A_3を適当にとりかえて $\forall i,\ a_i | A_i$

② $\dim_{\mathbb{Q}}\langle a_1,a_2,a_3\rangle = 2$ & $\forall i,j$ $\dim_{\mathbb{Q}}\langle a_i,a_j\rangle = 2$ の時. ①に同じ.

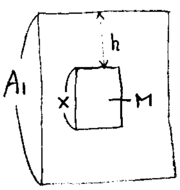
③ $\dim_{\mathbb{Q}}\langle a_1,a_2,a_3\rangle = 2$ & $\exists i,j$ $\dim_{\mathbb{Q}}\langle a_i,a_j\rangle = 1$ の時

箱詰め可能 $\Longleftrightarrow$ $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$ とし A_1,A_2,A_3を適当に入れかえて

$a_k | A_k$ & $a_i |^{\exists} A_s$, $a_j |^{\exists} A_t$ $\quad s,t \in \{i,j\}$

④ $\dim_{\mathbb{Q}}\langle a_1,a_2,a_3\rangle = 1$ ： 前題

[証明] ① (A_1,A_2,A_3) が (a_1,a_2,a_3)で箱詰め可能とする。 a_1を fix する。



(A_1,A_2,A_3)に詰められている1直方体Mをとる

MのA_1方向の深さhは仮定から

$$h = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 \qquad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}$$

と表示できる。もしMのA_1方向の辺がa_1でなければM全体をαa_1だけ上に移動させる。A_1方向の辺がa_1なるMをA_1方向に収縮させて直方体$(0,a_2,a_3)$にする。この操作をすべての(a_1,a_2,a_3)直方体に対して行なう。ついで方向A_1をとりかえA_2,A_3方向についてもa_1収縮を行なう。3辺を

$$\begin{cases} A_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \\ A_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 \\ A_3 = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 \end{cases} \qquad \lambda_i, \mu_j, \delta_k \in \mathbb{N}$$

とすれば上の操作の後3辺は

$$\begin{cases} A_1' = \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \\ A_2' = \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 \\ A_3' = \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 \end{cases}$$

になる。ところがどの(a_1,a_2,a_3)直方体もA_1,A_2,A_3のどれかの方向にa_1があるから最終的に$(0,a_2,a_3)$つまり体積0の直方体で(A_1',A_2',A_3')が埋められるから(A_1',A_2',A_3')の体積も0。それで $\exists A_i' = 0$

つまり　A_i は　a_i の整数倍

② a_1, a_2, a_3 をつけかえて　$a_3 = \lambda a_1 + \mu a_2$　$\lambda, \mu \geqq 0$ $(\in \mathbb{Q})$
と書ける。a_1, a_2 に対して ① と同じ収縮をする。(但し今度は X が a_3 の時は μa_2 に収縮させる）　したがって　$a_1 | A_1$, $a_2 | A_2$ として良い.
a_1, a_2, a_3 の $\mathbb{N}$ 結合が a_1 の自然数倍になるための必要十分条件は, a_2, a_3 の係数が 0 になることだから（$\lambda, \mu \geqq 0$ に注意）
直方体のおき方は一通りしかなく　残りの辺も a_3 の倍数になる。

③ a_1, a_2 を a_1, a_2 として一般性を失なわない. a_3 に対して ① と同じく $a_3 | A_3$　この方向に a_3 がおかれるから　残り (A_1, A_2) を (a_1, a_2) で埋めることになり前題より出る。

* いずれも必要条件を述べたが十分性の方は明らか。

* なお前題で　$x+y+z$　の　a_1 の剰余類による色分け をとらなくても $x+y$ の a_1 の剰余類による色分け としても得られる.

73/8

~円順列のパズルについて~

[問題] r個の数 $1, 2, \cdots, r$ を重複を許して N 個とり出し円形に並べる。

次の2つのような並べ方は可能か? ($r \geqq 2$)

(I) 時計回りに隣合った2つずつをとってできる数対の全体が 丁度 $1, \cdots, r$ から重複をこめて(重複なしに…… 問題I′) 2個とって並べた順列の全体にぴったり一致する。(したがってこの場合 N は r^2 或は $r(r-1)$ …(I′) となる)

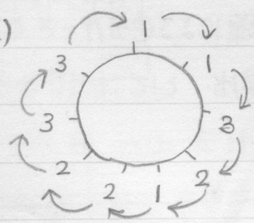
(II) Iと同じ設定で 順列を組合せにかえればどうか。(II, II′)

[解答] (I), (I′) は任意の r に対し可能

(II), (II′) は r が奇数の時可能, 偶数の時不可能

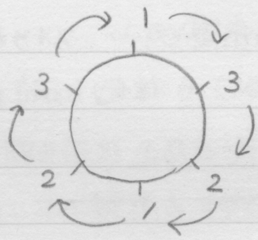
[例] $r=3$ の時

(I)



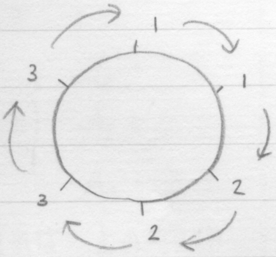
$\{11, 13, 32, 21, 12, 22, 23, 33, 31\}$

(I′)



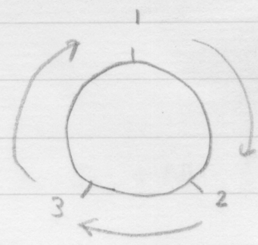
$\{13, 32, 21, 12, 23, 31\}$

(II)



$\{11, 12, 22, 23, 33, 31\}$

(II′)



$\{12, 23, 31\}$

[証明] (I) $A_s^{(t)} = a_1, a_1+s, a_1+2s, \cdots, a_1+(M-1)s,$ のような一巡の等差数列を表わす 但し計算は mod r で行ない 最終項 $a_1+(M-1)s$ は数 t であるとする。($M = \frac{r}{G.C.M\ of\ (s, r)}$)

例えば $A_2^{(1)} = 3, 5, 7, \cdots, r-1, 1$

基本になる数列　　1 1 2 2 3 3 4 4 ‥　$r\,r$（→ 11に続く

をとり この1の後に $A_2^{(1)}$ を挿入する。（どの1でも良い）

以下 順に $A_s^{(t)}$ を数 t の後に挿入していけば、すべての s, r について

以下の操作を行なった後 求める列が得られる。

（I′）は 最初の列として　1, 2, 3, ‥ , r　をとって同様

（II）. r が奇数なら　$2 \leqq s \leqq \left[\frac{r}{2}\right]$ についてのみ（I）と同じ操作

をすることによって求める列を得る。（II′ も同じ）

r が偶数とする。数列の中にでてくる 数1の 数を m

とする。1 1 と 1が だぶって でてくる所が 1ケ所あるから 1が

左右 どちらかにでてくる数対の個数は　$2m-1$ 個である。

一方 r 個から 2個 とってできる 組合で 1を含むものの数は重

複を許しているから r 個である。したがって $r = 2m-1$ でなけ

ればならず r が 偶数であることに反す。

重複を許さない場合 1のでてくる 数対の数は $2m$，r 個から

重複を許さず 2個 とってできる組合で 1を含むものの数は $r-1$

個 だから　$2m = r-1$　でなければならず 上と同様 r

が偶数であることに矛盾する。

74/5

～特殊な代数曲面について～

◎ $V_3 = \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{P}^3 \mid z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0\}$

は $\mathbb{P}^2$ の 6点を blow-up した surface と biregular

∵) $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow V_3 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$

が $\varphi(x_0 : x_1 : x_2) = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ s.t.

$$\begin{cases} z_0 = x_1 x_2^2 + \omega x_0 x_1^2 + \omega^2 x_2 x_0^2 \\ z_1 = -(x_1 x_2^2 + \omega^2 x_0 x_1^2 + \omega x_2 x_0^2) \\ z_2 = x_0 x_2^2 + \omega x_2 x_1^2 + \omega^2 x_1 x_0^2 \\ z_3 = -(x_0 x_2^2 + \omega^2 x_2 x_1^2 + \omega x_1 x_0^2) \end{cases}$$

で定義される。 φ の fundamental point は

$(0:0:1)$ $(0:1:0)$ $(1:0:0)$ $(1:\omega:\omega^2)$ $(1:\omega^2:\omega)$ $(1:1:1)$

の6点である。

◎ $V_2 = \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{P}^3 \mid z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\}$

は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ と biregular

∵) $\rho : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow V_2 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$

を $\varphi(x_0 : x_1 ; y_0 : y_1) = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ s.t.

$$\varphi \begin{cases} z_0 = \cancel{x_1}\, x_0 y_0 - x_1 y_1 \\ z_1 = -i(x_1 y_1 + x_0 y_0) \\ z_2 = x_0 y_1 + x_1 y_0 \\ z_3 = i(x_0 y_1 - x_1 y_0) \end{cases} \qquad \varphi^{-1} \begin{cases} x_0 = z_0 + i z_1 \\ x_1 = z_2 + i z_3 \\ y_0 = z_0 + i z_1 \\ y_1 = z_2 - i z_3 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x_0 = z_2 - i z_3 \\ x_1 = z_0 - i z_1 \\ y_0 = z_2 + i z_3 \\ y_1 = z_0 - i z_1 \end{cases}$$

で定義できる。