NOTE BOOK

Manufactured with best ruled foolscap

Brings easier & cleaner writing

雑記帳

VOL. 32・8

猪瀬博司

日章ノート 50

34s

Nissho Note

9	三角函数		半
18	級数		半
20	方程式	Ⅰ	完
22	方程式	Ⅱ	完
26	方程式	Ⅲ	未
25	代数学	Ⅰ	完
27	代数学	Ⅱ	未
28	行列式	Ⅰ	完
29	行列	Ⅱ	完
30	集合		未
31	射影幾何		半

6	雑記帳	Ⅰ	
10	雑記帳	Ⅱ	
13	雑記帳	Ⅲ	
17	雑記帳	Ⅳ	
19	雑記帳	Ⅴ	
21	雑記帳	Ⅵ	
23	雑記帳	Ⅶ	
32	雑記帳	Ⅷ	
5	自由帳（微分）		完
7	微分積分（5の続）		完

12　微積分とその応用（同名の本の写し）　完

1〜4，8，11，14，15，16，24　……　内容重複その他で廃

特1.　定理公式　（内容逐次増加）

予定　射影幾何　Ⅱ
　　　代数学　Ⅲ

1. 分解法則について

2 8月号エレガントな解答を求む第2問

3 ゲームについて

1. 山くずしより　　～ セミナー 67'8 NOTE より ～

o n 個の山から2人がそれぞれ交互に1度に1山から任意個の玉をとっていき最後に残った玉をとったものが敗とする。

i 　ある時点において 先手必勝か後手必勝かいずれかである。

ii、 後手必勝の局面 $L_1, L_2, L_3, \cdots, L_m$ （L_i はそれぞれの山の数 順序はどうでもよい）を $V(L_1, L_2, \cdots L_m)$ とかく

o 定義より $V(L_1, \cdots, L_m)$ ならば $V(L_{i_1}, L_{i_2}, \cdots, L_{i_m})$

o $V(L_1, \cdots, L_m)$ ならば $L_m \neq L_m'$ に対て $V(L_1, \cdots, L_{m-1}, L_m')$ ではない。

iii ・任意の $L_1, \cdots, L_{m-1}$ に対て $V(L_1, L_2, \cdots, L_{m-1}, X)$ なる X が存在する。

（証明） iii が成り立たないような $L_1, \cdots, L_{m-1}$ でその和 $L_1+L_2+\cdots+L_{m-1}$ が最低なものをあらためて $L_1, \cdots, L_{m-1}$ とする。$L_i' < L_i$ $(i=1, \cdots, m-1)$ として組 $L_1' \cdots L_{m-1}$, $L_1, L_2', L_3 \cdots L_{m-1}$, $L_1 L_2 L_3' L_4 \cdots L_{m-1}$, ……, $L_1 L_2 \cdots L_{m-2} L_{m-1}'$ をすべてつくりそれぞれにつき $V(L_1' L_2 \cdots L_{m-1}\ X)$, $V(L_1 L_2' \cdots L_{m-1}\ X)$ なる X の集合を G とする。G に属さない数を Y とする。

組 $L_1 L_2, \cdots, L_{m-1}, Y$ をつくれはこれから先手がどうとろうとそれは性質 V をもたない。

故に $V(L_1 L_2 \cdots L_{m-1}, Y)$ これは明らかに不合理

o 以上より任意の $m-1$ 個の数 $L_1, \cdots, L_{m-1}$ に対て $V(L_1, \cdots, L_{m-1}, L_m)$ なる L_m がただ1つ存在することがわかる。

iv ・任意の $L_1, \cdots, L_{m-1}$ に対して $L_i' < L_i$ なる L_i' を選び組 $L_1', \cdots, L_{m-1}$, $L_1 L_2' \cdots L_{m-1}, \cdots, L_1 L_2 \cdots L_{m-1}'$ をすべてつくり上と同じようにして性質 V をもつようにする X の集合 G をつくる。この時 L_m は G に属さない最小の自然数（0も含む）である。

v
$$V(\overbrace{0, \cdots, 0}^{m-1}, 1)$$
$$V(0, \cdots, 1, 0)$$
$$V(0, \cdots 1, 1, 1)$$
$$V(0, \cdots 0, \overbrace{1, \cdots, 1}^{k})$$ 　k が奇数の時のみ

vi 　n 個の数 $L_1, \cdots, L_m$ に対てそれらを2進法で書きケタあげせずに加え合わせた結果が0になる時 $U(L_1, \cdots, L_m)$ と書く

vii　$U(L_1, L_2, \cdots, L_m)$ ならば　$L_m \neq L_m'$ なる L_m' に対して　$U(L_1, L_2, \cdots, L_m')$ とはならない。

viii　$U(L_1, L_2, \cdots, L_m)$ なる L_m が組 $L_1, \cdots, L_{m-1}$ に対してただ1つ存在する。

ix　$U(L_1, \cdots, L_m)$ ならば　$U(L_{i_1}, L_{i_2}, \cdots, L_{i_m})$

x　$U(L_1, \cdots, L_m)$ とすれば　$L_m' < L_m$ なる任意の L_m' に対して　$L_i' < L_i$ なる任意の L_i' をとり組 $(L_1', L_2, \cdots, L_{m-1} L_m')$, $(L_1, L_2', \cdots, L_{m-1} L_m')$, $\cdots$, $(L_1, L_2, \cdots, L_{m-1}' L_m')$ のすべての中に性質 U をもつものが存在する。

（証明）　ケタあげしない2進法の加え算を単に記号＋で表わすことにすれば

$U(L_1, \cdots, L_m)$　は　$L_1 + L_2 + \cdots + L_m = 0$　と同値である。両辺に L_m を加えても等式は成り立つから　$L_1 + L_2 + \cdots + L_m + L_m = L_m$　　$L_m + L_m = 0$　だから、

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_{m-1} = L_m$$

今 $L_m > L_m'$ なる任意の L_m' をとる。　L_m の方が大きい最高ケタ P 即ち L_m の方が1で L_m' が0なる1番高いケタをとりだす。　すると $L_1, L_2, \cdots, L_{m-1}$ のそのケタの数の中には少なくとも1つ1がある。1をそのケタにもつものを L_i とする。

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_i' + \cdots + L_m' = 0$$

なる L_i' をつくる。　L_i' の P ケタ目は0でなければならない　しかも P 以上のケタでは L_m と L_m' は同じだから、L_i' も L_i と同じ即ち　$L_i' < L_i$ である。　即ちこのような L_i' に対して

$$U(L_1, \cdots, L_i', \cdots, L_m')$$

が成り立つ。

xi　$U(L_1, \cdots L_{m-1}, X)$ なる X は、　組 $(L_1 L_2 \cdots, L_i', \cdots, L_{m-1}$　　$L_i' < L_i$　　$(i=1, \cdots, m-1)$ 対しつくられる　$U(L_1, \cdots, L_i', \cdots, L_{m-1}\ Y)$ なる Y の集合 M に属さない最小の自然数（0も含む）である。

（証明）　明らかに X は M に属さない（∵ viii）は X より小さいすべての自然数（0も含む）は X より M に属す 従って　定理が成り立つ。

xii　$U(\overbrace{0, \cdots\cdots, 0}^{n})$

$U(0, \cdots 1, 1)$

$\cdots\cdots$

$U(0, \cdots 0, \overbrace{1, \cdots, 1}^{k}) = \begin{cases} & (k\text{が偶数の時のみ}) \\ 1 & k\text{が奇数} \end{cases}$

xiii　性質 V と U は　$\bar{V}(0, \cdots 0, 1)$,　$U(0, \cdots, 0, 0)$ なる基礎がちがう

だけで、構造は同じである。

IXV　$L_1, \cdots, L_m$ のうち2以上のものがある時には　$U=V$ である。

（証明）　帰納法で証明する　まず　$L_1+\cdots+L_{m-1}$（普通の加え算）が2の時

即ち その時　$V(0,\cdots,2,2)$，$U(0,\cdots,2,2)$ だから成り立つ。

今　$L_1+\cdots+L_{m-1}=k$ とし　和が k より小さい中に2以上のものを含むものについては $U=V$ を仮定する。すると

$$\left.\begin{array}{l} U(L_1,\cdots,L_{m-1},X) \\ V(L_1,\cdots,L_{m-1},Y) \end{array}\right\}$$ に iv と xi を適用すると

M :　$U(L_1,\cdots,L_i',\cdots,L_{m-1},u)$ なる u の集合

G :　$V(L_1,\cdots,L_i',\cdots,L_{m-1}\ v)$ なる v の集合

$L_1,\cdots,L_{m-1}$ のどれもが1以下であり Y が2以上であることはありえない → V

$L_1,\cdots,L_{m-1}$ のどれもが1以下であり X が2以上であることはありえない → 定義

よって $L_1,\cdots,L_{m-1}$ の中の1つ例えば L_1（一般性は失っていない）が2より大きいとする。

この時　1 以外の i については 仮定より $u=v$ である。

又 $i=1$ の場合でも $L_i' \geq 2$ の時は $u=v$ であるから、

$L_i'=1, 0$ の場合を見ると

$U(1, L_2,\cdots,L_{m-1},u)$　　$U(0, L_2\cdots,L_{m-1},u')$

$V(1, L_2\cdots\ L_{m-1}\ v)$　　$V(0, L_2,\cdots,L_{m-1},v')$

もしここで、$L_2,\cdots,L_{m-1}$ の中に2以上のものがあれば今までのものと合わせて

$M=G$ 即ち $X=Y$ となる。

従って　$L_2,\cdots,L_{m-1}$ は 2より小さいとする。　$L_i=0$ 又は 1.　$i=2,\cdots,m-1$

又 $L_2,\cdots,L_{m-1}$ が2より小さければ u, v も明らかに2より小さくなる。（u', v' も同様）

したがって

a　$L_2,\cdots,L_{m-1}$ のうち 1が奇数個ある時

$u=0,\quad u'=1,\quad v=1\quad v'=0$

b.　$L_2\cdots,L_{m-1}$ のうち1が偶数個ある時

$u=1,\quad u'=0,\quad v=0,\quad v'=1$

いずれの場合も 両者とも集合 $\{0,1\}$ になる　従って　$M=G$ 即ち

$X=Y$

で 故に $U=V$ である。

～現代代数学 I より～

1. ガロア拡大体 ＝ 正規拡大体

Σ が Δ 上ガロア拡大体である。

Σ が Δ 上代数的で Σ 内に1根をもつ $\Delta[x]$ の多項式（既約）$g(x)$ が $\Sigma[x]$ で完全に因数分解されるときである。

例. Δ に $\Delta[x]$ の幾個かの多項式（無限個も可）のすべての根を付加して生ずるガロア拡大体　（逆も可）

○ 既約な方程式 $f(x)=0$ のただ1つの根を付加しただけで得られる拡大体がガロワ拡大体である時 $f(x)=0$ を正規（ガロアの方程式）とよぶ
$g(x)=0$ の1つの根を Δ に付加しただけで $f(x)$ の分解体が えられる時
$f(x)=0$ をガロアの分解式という。

2. 分離的拡大

付加する要素 θ が $\Delta[x]$ の既約多項式の1重の零点なる時

完全体　$\Delta[x]$ のすべての既約多項式が分離的なる時

1. 標数0の体
2. 標数 p の体で p 乗根を含むもの

～ セミナー 11月号（67'） エレガントな解答を求む 2 より ～

67' 10, 14

n を正の整数として

$$x_k = \cos(k\pi/n) \qquad (k=0,1,\cdots,n)$$

とおく。この時 たかだか $(n-1)$ 次の任意の多項式 $P(x)$ については、つねに

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[P(x_{k+1}) - P(x_k) \right]}_{(B)} = 0 \qquad (A)$$

であることを証明せよ。

（証明） 多項式 $f(x)$, $g(x)$ がともに性質（A）をもつとする この時

○

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[f(x_{k+1}) - f(x_k) \right] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[g(x_{k+1}) - g(x_k) \right] = 0$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\{ a f(x_{k+1}) + b g(x_{k+1}) \} - \{ a f(x_k) + b g(x_k) \} \right] = 0$$

同様にして 多項式列 $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_m$ が性質（A）をもつとすれば

多項式 $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m$ も又 性質（A）をもつ。

多項式の列として チェビシェフの多項式 $T_1, T_2, \cdots, T_{n-1}$ をとる。

すると すべての $n-1$ 次以下の多項式は 容易に

$$g(x) = a_1 T_1 + a_2 T_2 + \cdots + a_{n-1} T_{n-1}$$

となる。（ T_i の次数は i 次とする）

従って 多項式 $T_1, T_2, \cdots, T_{n-1}$ に対して（A）が成りたつことがいえれば よい。

○ T_i の定義より

$$T_i(\cos t) = \cos it$$

故に
$$T_p(x_k) = T_p\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) = \cos\frac{kp\pi}{n}$$

となる。これを（A）の左辺の式（B）に代入すると

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[T_p(x_{k+1}) - T_p(x_k) \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\cos\frac{(k+1)p\pi}{n} - \cos\frac{kp\pi}{n} \right]$$

$$= -\cos 0 + 2\left[\cos\frac{p\pi}{n} + \cos\frac{3p\pi}{n} + \cdots\cdots \right]$$

$$- 2\left[\cos\frac{2p\pi}{n} + \cos\frac{4p\pi}{n} + \cdots\cdots \right]$$

$$+ (-1)^{n-1} \cos p\pi \qquad (2)$$

簡単のため $\dfrac{p\pi}{n} = \theta$ とおく すると

(2) 式は

$$2\left[\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots\cdots + \cos n'\theta \right]^{1)}$$

$$-2\left[\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cdots\cdots + \cos n''\theta \right]^{2)}$$

$$-1 + (-1)^{n+p-1} \qquad (3)$$

となる。　　但し　$\cos n\theta = (-1)^p$ ，$n\theta = p\pi$

n' は n 未満の最大奇数，　n'' は n 未満の最大偶数

1) の和を $2I_1$　　2) の和を $-2I_2$

1) で cos のかわりに sin を入れたものを $2J_1$，　2) も同じく $-2J_2$ とする。

すると

$$I_1 + iJ_1 = e^{i\theta} + e^{3i\theta} + \cdots + e^{n'i\theta} = \frac{e^{i\theta}\left(e^{2i\theta \times \frac{n'+1}{2}} - 1\right)}{e^{2i\theta} - 1} \quad 3)$$

$$I_2 + iJ_2 = e^{2i\theta} + e^{3i\theta} + \cdots + e^{n''i\theta} = \frac{e^{2i\theta}\left(e^{2i\theta \times \frac{n''}{2}} - 1\right)}{e^{2i\theta} - 1} \quad 4)$$

だから　　3) の 4) の実部がそれぞれ I_1, I_2 となる。

（($0 < p < n$ だから　$e^{2i\theta}$ が 1 にならないので　3)，4) がなりたつ

即ち　$p = n$ なら　$e^{2i\theta} = 1$ となって 3)，4) は成りたたない　）

I nが偶数の時

$$n' = n-1$$
$$n'' = n-2$$

だから

3) …… $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta}-1}\left(e^{2i\theta \times \frac{n}{2}} - 1\right) = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta}-1}\left((-1)^p - 1\right)$

pが偶数なら　3) …　0　(4)

pが奇数なら　$-\dfrac{2e^{i\theta}}{e^{2i\theta}-1}$　(5)

4) …… $\dfrac{e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}-1}\left(e^{2i\theta \times \frac{n-2}{2}} - 1\right) = \dfrac{(-1)^p - e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}-1}$

pが偶数なら　4) ……　-1　(4')

pが奇数なら　4) ……　$-\dfrac{1+e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}-1}$　(5')

(4) と (4') から

pが偶数なら

$$\begin{aligned}(3) &= 2I_1 + 2I_2 - 1 + (-1)^{n+p-1} \\ &= 2\cdot 0 - 2\cdot(-1) - 1 + (-1)^{-1} \\ &= 2 - 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

(B) $= 0$

pが奇数なら

$$(I_1 - I_2) + i(J_1 - J_2) = \frac{e^{2i\theta}+1}{e^{2i\theta}-1} - \frac{2e^{i\theta}}{e^{2i\theta}-1}$$

$$= \frac{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta} + 1}{e^{2i\theta}-1} = \frac{(e^{i\theta}-1)^2}{(e^{2i\theta}-1)} = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$$

$$= \frac{(e^{i\theta}-1)(e^{-i\theta}+1)}{|(e^{i\theta}+1)|^2} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{|e^{i\theta}+1|^2} = \frac{2i\sin\theta}{|e^{i\theta}+1|^2}$$

$\therefore \quad I_1 - I_2 = 0$

$(3) = 2(I_1 - I_2) + (-1) + (-1)^{n+p-1} = 0 \qquad \therefore \quad (B) = 0$

II　nが奇数の時

$$n' = n-2$$

$$n'' = n-1$$

$$3) \cdots \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta}-1}\left(e^{2i\theta\times\frac{n-1}{2}}-1\right) = \frac{(-1)^p - e^{i\theta}}{e^{2i\theta}-1}$$

$$4) \cdots \quad \frac{e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}-1}\left(e^{2i\theta\times\frac{n-1}{2}}-1\right) = \frac{(-1)^p e^{i\theta} - e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}-1}$$

pが偶数の時

$$3) \cdots \quad \frac{1-e^{i\theta}}{e^{2i\theta}-1}$$

$$4) \cdots \quad \frac{e^{i\theta}-e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}-1}$$

$$(I_1-I_2)+i(J_1-J_2) = \frac{1-e^{i\theta}-e^{i\theta}+e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}-1} = \text{純虚数}$$

$$\therefore \quad I_1 - I_2 = 0$$

従って　$(3) = 2(I_1-I_2)+(-1)+(-1)^{n+p-1}$

$= 0$

pが奇数の時

$$3) \cdots \quad -\frac{e^{i\theta}+1}{e^{2i\theta}-1}$$

$$4) \cdots \quad -\frac{e^{2i\theta}+e^{i\theta}}{e^{2i\theta}-1}$$

$$(I_1-I_2)+i(J_1-J_2) = \frac{e^{2i\theta}+e^{i\theta}-e^{i\theta}-1}{e^{2i\theta}-1} = 1.$$

$$\therefore \quad I_1 - I_2 = 1$$

$$(3) = 2(I_1-I_2)+(-1)+(-1)^{n+p-1}$$

$$= 2-1-1$$

$$= 0$$

以上により(A)は $n-1$ 次以下のすべての多項式に対して なりたつ。　　QED

課題

1. チェビシェフの多項式は既約か否か

～セミナー 12（67'）問題より～

○1, i, j という2個の正の整数が $1 \leqq i < j \leqq N$ （Nは奇数 $= 2n+1$）

とする。 $m = j - i$， とし

I. $m \leqq n$ ならば $k = i$, $l = m$

II. $m > n$ ならば $k = j$, $l = N - m$

によって (i, j) に対して (k, l) をつくれば

$k = 1, 2, \cdots, 2n+1 = N$, $l = 1, \cdots, n$

となり (i, j) , (k, l) の対応は1対1になる。

k, l, から i, j を求める演算を示せ。

N が偶数の時はどうなるか。

（証明）○ 上の変換を σ で表わすと $\sigma(i, j) = (k, l)$,

σ は明らかに一意であるから σ^{-1} が一意写像であることがいえればよい。

$\sigma^{-1}(p, q) = (r, s)$ とする。 すると $(p, q) = \sigma(r, s)$,

$s - r \leqq n$ とするならば $p = r$, $s - r = q$ ∴ $s = r + q = p + q$

$$\sigma^{-1}(p, q) = (p, p+q)$$

$s - r > n$ とするならば $p = s$, $s - r = N - q$ $r = s + q - N = p + q - N$

$$\sigma^{-1}(p, q) = (p+q-N, p)$$

以上より $\sigma^{-1}(p, q)$ として考えられるのは $(p, p+q)$, $(p+q-N, p)$

の2つであり $p+q$, $p+q-N$ の両者が共に1とNの間の数になることはないから $\sigma^{-1}(p, q)$ は大くとも1つの原像 (r, s) しかもたない。即ち σ^{-1}

は一意写像である。 又 以上より $\sigma^{-1}(p, q)$ は次のようにして求まる

I $p+q > N$ の時 …… $\sigma^{-1}(p, q) = (p+q-N, p)$

II $p+q \leqq N$ の時 …… $\sigma^{-1}(p, q) = (p, p+q)$

○ N が偶数の時 $N = 2n$ 組 (i, j) の個数は $n(2n-1)$ 個である。

上と同様にして (i, j) の変換を σ とおく。 σ は明らかに一意的である。

今 (α, β) が ある組 (i, j) の写像になったとする。 すると上と同様に

(α, β) の原像として $(\beta \leqq n)$

I $j - i \leqq n$ とするならば …… $\sigma^{-1}(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha+\beta)$

II $j - i > n$ とするならば …… $\sigma^{-1}(\alpha, \beta) = (\alpha+\beta-N, \alpha)$

の2つが考えられる。 β は n 以下であるから もし α が n 以下であれば

II なる原像はありえない。又もし α が n より大であれば, $\beta = 1, 2, \cdots, N-\alpha$, なる (α, β)

は必ずIの原像をもつ（IIの原像はもたない） $\beta = N-\alpha+1$, $\cdots$, $n+1$ なる (α, β) は 必ず

Ⅱの原像をもつ。（Ⅰの原像はもたない）なお $\alpha > n,\ \beta = n$ なる (α, β) の原像は存在しない。

以上より $\sigma^{-1}(\alpha, \beta)$

は $\alpha \leq n,\ \beta \leqq n$ か又は $\alpha > n,\ \beta < n$ ならば必ず存在して1つに限る。

その求め方は，Ⅰ，Ⅱに従えばよい。

組 (α, β) の数は $n^2 + n(n-1) = 2n^2 - n = n(2n-1)$ であるからこれがすべてであることもわかる。

〜 問題2 〜

半径1の円周S上の2点P,Q間の距離 $d(P,Q)$ を，$P=Q$ の時，0，PとQが直径の両端のとき π，それ以外の時，P,Q間の短かい方の弧の長さ，と定義しておく
S上に n 個動点 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ を考えた時 相互の距離の和

$$D = \sum_{1 \leq i < j \leq m} d(\theta_i, \theta_j)$$

の最大値は何如。

（解答）

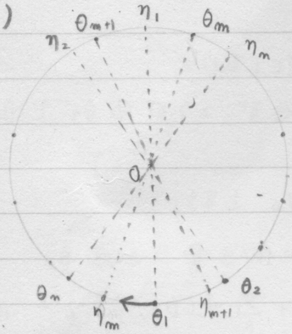


図1

そのような最大値 M が存在するとする。
ちょうど右図のような $(\theta_1, \cdots, \theta_m)$ の時に

$$D = M$$

になったとすれば。その他のあらゆる組 $(\theta'_1, \cdots, \theta'_m)$ に対して

$$D' \leqq M$$

が成り立つ。

θ_i を π 回転した点を η_i とする。すると次の2つの場合がおこる

I. η_1 はどの θ_i とも一致しない … 図1
II ある θ_m が存在して η_1 と一致する … 図2

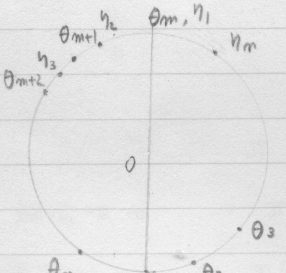


図2

Iの場合 もし $\theta_1 - \eta_1$ の右側にある θ_i の点と $\theta_1 - \eta_1$ の左側にある θ_i の点の数が異っているとすると
(仮に右側の方が多いとすると)
θ'_1 を左側に η_m ともとの θ_1 の間へ $d\theta_1$ 移動すると

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} d(\theta_i, \theta_j)$$

の項のうち θ_1 に関係しないものはそのままで
θ_i が右側にあれば

$$d(\theta'_1, \theta_i) = d\theta_1 + d(\theta_1, \theta_i)$$

θ_j が左側にあれば

$$d(\theta'_1, \theta_j) = d(\theta_1, \theta_j) - d\theta_1$$

右側の個数を k 左側のを l とすれば 全体として $k > l$

$$k\,d\theta_1 - l\,d\theta_1$$

だけ前と変わったことになり $k > l$ だから明らかにこれは正で，新しい組 $(\theta'_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ の D は M よりも大きくなってしまい。
よって図1の $\theta_1 - \eta_1$ の左と右にある θ_i の点の数は常に等しい。

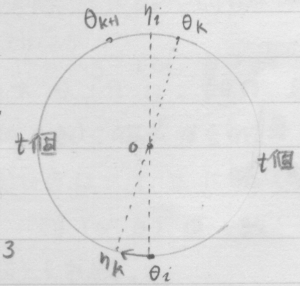


図 3

$D=M$ となる任意の組 $(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ を選ぶこれに対に先と同様に反対側の点の組を $(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ とする。

差 $|\theta_i - \eta_j|$ のうち最小の組を $|\theta_i - \eta_k|$ とする

そうすると η_k と θ_i の間には θ_j の点はこない。

もし θ_j が η_k と θ_i の間にくれば η_k, θ_j が仮定の θ_i, η_j になる。先にのべたことから η_i が $\{\theta_j\}$ の点に一致しない時 $\theta_i - \eta_i$ の右側と左側の $\{\theta_j\}$ の個数は等しい

θ_i を η_k の方に移動させると明らかに D の値は変化しない。

$\theta_i' = \eta_k$ となるまで θ_i を移動させる。そうしても D の値は変化しない。

このようにして $D=M$ なる組 $(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ の中には必ず 2つの点 θ_i と θ_j が少なくても 1組むきあうものがとれる。 --- (A)

M は明らかに n の変数であるから特にそれを区別して M_n とする。

(A) のようにして選んだ組 $(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ の中から互いに向き合う2点 θ_i, θ_j をぬきさると。 D はその分だけ 即ち $\sum_k d(\theta_i, \theta_k) + \sum_k d(\theta_j, \theta_k) - d(\theta_i, \theta_j)$

だけ減じる $d(\theta_i, \theta_k) + d(\theta_j, \theta_k) = \pi$ だから

減ずる分は $(n-1)\pi$

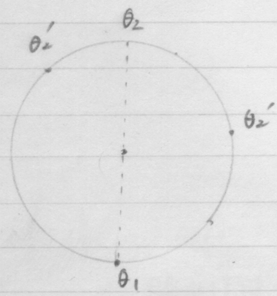
又 向き去った後は $n-2$ 個の円周上の点が残るから

$$M_n - (n-1)\pi \leqq M_{n-2}$$

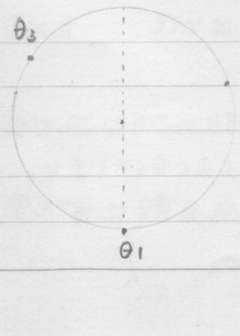
$$M_n \leqq M_{n-2} + (n-1)\pi$$

$$M_n \leqq M_{n-2} + (n-1)\pi \leqq M_{n-4} + \{(n-1)+(n-3)\}\pi$$

$$\leqq \cdots\cdots \leqq \begin{cases} M_3 + \{4+6+8+\cdots+(n-1)\}\pi & n \text{ が奇数} \\ M_2 + \{3+5+7+\cdots+(n-1)\}\pi & n \text{ が偶数} \end{cases}$$



M_2 は明らかに π で 又 M_3 は θ_i の移動に関する先にのべたことから 明らかに 2π となる。故に



$$M_n \begin{cases} \leqq (2+4+\cdots+(n-1))\pi \\ = \dfrac{\{2+(n-1)\}\cdot\frac{n-1}{2}}{2} = \dfrac{n^2-1}{4}\pi \quad (n=2k+1) \\ \leqq (1+3+\cdots+(n-1))\pi \\ = \dfrac{n \times \frac{n}{2}}{2} = \dfrac{n^2}{4} \quad (n=2k \end{cases}$$

一方 円に内接する正n角形の D は

$$D = \begin{cases} \dfrac{n^2-1}{4}\pi & (n\text{が奇数}) \\ \dfrac{n^2}{4}\pi & (n\text{が偶数}) \end{cases}$$

∴ とるさかう 求める最大値は上述の通りになる。

〜セミナー 1月号 68' 問題1 より〜 67.12.17(日)

○ 1から10を1つずつ書いた10枚のカードをよくきって並べると，かならずその中から数値が単調増加又は単調減少の部分列が少なくとも4枚選べることを証明してください。

（証明）

① 3枚の順列が単調増加又は単調減少でなければ2枚の増加，2枚の減少が少なくともそれぞれ1組存在する。

② 5枚以上の順列はかならず3枚の単調な部分列がえらべる。

（証明） 3枚の単調列をもたないような順列を存在したとしそれを
A1B5C ，（A, B, C は順列で空でもよい） と書く。（5が先にきていれば前後いれかえる） Bが空でないなら 1 B 5 は必ず3枚の単調増加列を含むから B = φ よって A15C の形である。もし Aが2枚以上の順列なら それは単調増加又は単調減少の列でしたがってそれに，1又は5のどちらかを加えた列は3枚の単調列を含む 故にAの枚数は1枚か又は空である。ところが Cにも同様なことがいえ Cの枚数も 0又は1である。これは明らかに不合理である。
（証明の途中の数字 1, 2, …, 5 は順列の数の大小の順を記したもの）

③ 次の性質をもつ順列を性質（P）をもつ順列と呼ぶ
要素の中に2枚の増加列の大なる方でしかも2枚の減少列の小なる方になっているものが存在する。
次の性質をもつ順列を性質（Q）をもつ順列と呼ぶ
要素の中に2枚の増加列の小なる方でしかも2枚の減少列の大なる方になっているものが存在する。

④ 3枚の単調列を含まない4枚の順列は性質（P）も（Q）ももち，単調でない3枚の順列は性質（P）か（Q）かのどちらか1つをもつ。

（証明） 4枚の順列が3枚の単調列をもたぬためには，そのはしに1（最小数）や4（最大数）がきてはいけない。（こ もしくれば①よりただちに3枚の単調列ができる）
以上からそのような順列をならべると
（2143），（2413），（3142），（3412）
となる。この4つはみな（P）も（Q）ももつ。
3枚の順列が単調でないのは
（312），（132），（231），（213）
の4つでこのうち前の2つが性質（P）を後の2つが性質（Q）をもつ。

⑤ 順列AをBとCの2つの順列に切りはなし（Bの方がCよりも前） Bが（P）を Cが（Q）をもつようにできるなら Aは4枚の単調列をもつ。

(証明)　Bの中の (P)の性質を表わす要素をα, その増加列を α_1, α, 減少列を α_2, α とし, C についても同様に 増加列を β, β_1 減少列を β, β_2 とする。

もし　$\alpha < \beta$ ならば

$\alpha_2, \alpha, \beta, \beta_1$

が単調　もし　$\alpha > \beta$ ならば

$\alpha_1\ \alpha\ \beta\ \beta_2$

が単調だから証明された。

⑥　10枚の順列で 4枚の単調列をもたないものが存在したとしそれを

$i_1, i_2, \cdots\cdots, i_{10}$

とする。　順列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_{10}\}$ を 1と10で区切って

A 1 B 10 C　　(A, B, C は順列)　　(a)

の形にかく (10の方が先なら前後入れかえる)

この時

ア)　AもCも 3枚の単調列を含まない。(1と10のある位置からあきらか)

従って AもCも4枚以下である。(∵ ②)

イ)　Bは単調減少である。(もし1組でも2枚の増加列を含めば 1と10にはさまれていることから単調増加の4枚の列ができる)　故にBは3枚以下である。

※ 問題1の証明

i)　Bの枚数が0である時　((a)において)

この時 AもCも4枚以下だから AもCもちょうど4枚になる。

⑥アより, Aは3枚の単調列をもたない4枚の順列で, ④より性質(P)をもつ

同じくCは性質(Q)をもつ　よって順列 AB (A, 1, 10, B) は ⑤より4枚の単調列をもつ。…… 仮定に反する。

ii)　Bの枚数が1である時

この時 AかCかどちらかが4枚で他方が3枚だが, Aが4枚としてよい

(もしAが3枚なら順列全体を前後入れかえて更に各要素と11との差で順列をつくれば Aが4枚の順列(a)ができる)

Aは④より性質(P)をもつ。もしCに Bの要素βよりも小さい数γがあれば

$\beta\ 10\ \gamma$　　が性質(Q)をもつから⑤より4枚の単調列

が存在する。よって Cの要素はみなβよりも大きい。Cは3枚の順列だから

①より増加の列 γ_1, γ_2 をもつから

$1, \beta, \gamma_1, \gamma_2$

が4枚の単調増加列となる。…… 仮定に反す。

iii) Bの枚数が2の時．　Bの要素を β_1, β_2 とする（$\beta_1 > \beta_2$）

列　$1, \beta_1, \beta_2, 10$　は性質（P），（Q）を共にもつから　A，Cの枚数は共に3でなければならない。（④，⑤より）

Aは性質（P）をもたない（もてば⑤）。又Cは性質（Q）をもたない。

よってAの型は（2 1 3），（2 3 1）のどちらかである。Aの最大数 α_3 が β_1 よりも小さいなら　$\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, 10$（$\alpha_2$ はAの2番目に大きい数）が単調増加列になるから　$\alpha_3 > \beta_1$ である。又この順列全体を前後いれかえて11からそれぞれの数をひいた順列をつくれば，これもやはり A', C' の枚数が3の順列で，A' の方の最大数（つまりCの最小数を γ_3 とすれば）$11-\gamma_3$ は $11-\beta_2$ よりも大きい。従って
（この変形を加えても単調列は単調列にかわる。）

$\beta_2 > \gamma_3$ であり．

$\alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma_3$

が単調減少列になるので　仮定に反す。

iv) Bの枚数が3の時．　Bの要素を $\beta_1, \beta_2, \beta_3$（$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$）とする。

A，Cのどちらかが3枚以上で（これも前と同じ変形で）Aが3枚以上としてよい。

① より Aは増加列 α_1, α_2 をもつ．　$\alpha_2 < \beta_1$ なら．

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, N$

が単調列

$\alpha_2 > \beta_1$　なら

$\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$

が単調列になる。……　仮定に反す。

以上から（a）のような順列が存在しないことがわかった。

〜 セミナー 1月号 68' 第2問 より 〜 67・12・17

○ 8行8列計64個のマス目の中にそれぞれ ○印か×印が記入されていて，どの行を見ても4個以上のます目に ○ があり，どの列をみてもやはり4個以上のます目に○があります。このような場合，行や列の番号を適当につけかえさえすれば，第1行第1列，…，第i行第i列 … 第8行第8列 という8個のます目の中に同時に○があるようにかならずできることを証明してください。

（証明）

8行8列の条件の性質をもった任意の○× 行列をAとする。
もしAの どの行i に対しても その行の中で ○ である列 $S(i)$ を適当に対応させては $S(i)$ $(i=1,\cdots,m)$ がすべて異なるようにできるなら 列 $S(i)$ を 列 i に移しかえることにより 第i行第i列のマスが ○ になる $(i=1,\cdots,8)$ よってこのような対応 Sの存在がいえればよい。

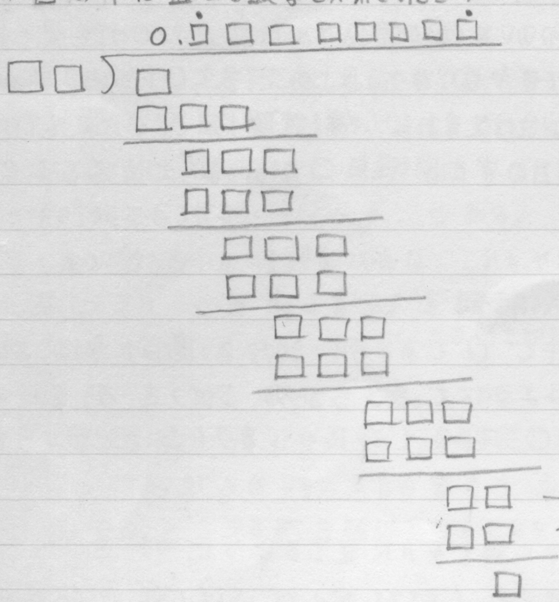
Aの1から m $(1\leqq m\leqq 7)$ までの各行に対し互いに異なるように列 $S(1)$，$S(2)$，…，$S(m)$ が 選べると仮定する。（もちろん第i行 $S(i)$列のマス目は○であるように選ばれるとする）この時 1から $m+1$ 行までも異なる列 $S'(1)$，$S'(2)$，…，$S'(m+1)$ を選ぶことができる。

○まず Aの 1〜m 行に対して仮定から $S(1)$，…，$S(m)$を選ぶ，
もし $(m+1)$行目の○のついた列がこのm列と異なるように1つも選べないなら（$m\leqq 3$ なら常に選べるので以下の証明には関係がない），$(m+1)$ 行目で○のついた列はこれらのm列の中に含まれる。それらを $S(i_1)$，$S(i_2)$，…，$S(i_r)$ とする。$(r\geqq 4)$ 次に上のm列と異なる列 α を1つとる。αは $S(i_1)$，…，$S(i_r)$ のどれとも一致しないから 第$m+1$行 第α列 は × である。したがって第α列が○である行は第$(m+1)$行を除いた7行のうち少なくとも4行ある。一方 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ も第$(m+1)$行を除いた7行のうちの少なくとも4行だから これらの行のうち1つは両方の性質，つまり α列が○で そして $i_1,\cdots,i_r$ の中の行の1つであるという性質をもっている。この行を i_p とする。
そこで改めて対応 S'，…を i_p 以外の行iには $S(i)$ そのままを i_p 行には列α，を 第$(m+1)$行には列 $S(i_p)$ を対応させれば，これは条件にかなう。

これにより Aの1行から1の列を選び 順々に列をふやして 8行全部に対応 Sをつけることができる。（証明終わり）

〜 セミナー 3月号 '68 第1問より 〜

○ 次の□の中に適当な数字を入れてください



(B)

(A)

1. □□□ と並んだ最初の数は 0 ではない
ただし商のはじめは 0.0… かもしれない。
2. 答の循環小数は基本循環節である。
3 10進法の計算である。

(解答) 除数をP 被除数をBとする

$\frac{B}{P}$ は基本循環節の長さが 8 の分数である。P, B に共通因数があればそれを約して $\frac{B'}{P'}$ (P', B'は素) の形にしておく。

$$\frac{B'}{P'} = \frac{A}{99999999}$$ (Aは8ケタ以下の整数)

であるから
$99999999\,B' = P'A$

$$P' \mid 99999999 = 9 \times 11111111 = 9 \times 11 \times 1010101 = 9 \times 11 \times 101 \times 10001 = 9 \times 11 \times 101 \times 73 \times 137$$

```
     0.09589041
73 ) 7
     657
      430
      365
       650
       584
        660
        657
          300
          292
            80
            73
             7
```

(C 図)

~~2ケタ~~ 100以下の整数でこれを分母とする分数が基本循環節 8 となるのはこれから 73 だけである。
$P' = 73$ 且つ 73 の倍数で 2ケタの整数は 73 だけだから $P = 73$ である。
故に (A) の部分は 73 となり (B) は 80 となる。故に $B = 7$ である。実際これで割り算を実行すると (C) のようになり問題に適する。

～ セミナー 3月号 '68 第2問より ～ ← この解答誤り

○ 凸な立体で、どの方向への正射影も3角形か4角形になるものは 4面体に限ることを証明してください。

（証明） 一平面αとそれに直交する平行光線を定める。 凸立体Pからαへ正射影することを S，S' で表わす。 但し Pの置き方によって その正射影 $S(P)$ は変化するから、 S，S' はPの置き方に対応している。 Pを適当に回転させて Sの場合とS'の場合のPが重なる時 その回転の角を $\widehat{SS'}$ で表わす。

1、 S，回転の軸 l，，に任意の正数εを定めれば

$\widehat{SS'} < \delta$ なる任意の S' について

$$d(S(X),\ S'(X)) < \varepsilon$$

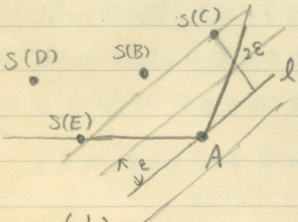
（XはPの点） $d(A,B)$ はAB間の距離

が成り立つ。

2. 写像 S に対して $\widehat{SS'}$ を十分小さくとれば $S(P)$ の重なっていない頂点は $S'(P)$の頂点にうつり， $S(P)$ の重なっている頂点については そのうち 少なくとも 一つのPの頂点の像が $S'(P)$の頂点になる。

（証明） Pの頂点 A が $S(P)$ に対しても頂点になる必要十分条件は $S(A)$ を通る（α上で）直線で 他のPの頂点の像をみな一方の側に含み入れるようなものが存在することである。

$S(P)$の重なっていない一頂点 A を選ぶ Aを通って 他の $S(X)$（XはPの頂点）を一方の側に含み入れてしまうような直線 l を一つ定め



(1)

$$\min d(S(X),\ l) = 2\varepsilon \qquad (X \neq A)$$

とする。 回転の軸を空間内に適当にとり、十分小さい角（$<\delta$）だけPを回転させれば （S'）

$$d(S'(X),\ S(X)) < \varepsilon$$

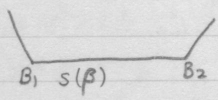
とすることができる。 故に $d(S'(X), l) > \varepsilon$ ， $d(S'(A), l) < \varepsilon$

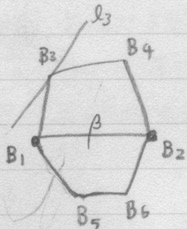
これと lについての仮定から $S'(A)$ を通り lに平行な直線を l'とすれば 他の$S'(X)$ はすべて l' の片側にくるから $S'(A)$は $S'(P)$の頂点である。

$S(A)$点が重なっている場合にも同じことをして $S'(A)$， $S'(B)$ （A，B はSで重なっている） を通ってlに平行な直線をひけば そのうち一方の直線をl'とすれば 必ず上のようにすることができる。（特に 2つの直線が一致すれば それぞれにつき少しずらして l'をひく）

3　Pの一つの面βが光線に平行になるようにPの位置Sを定める。但しβの面どの辺とも光線は平行でないとする。
この時　Pを少しだけ回転させて位置S′にすれば　S′(P)の頂点の数は　S(P)の頂点の数より大きくすることができる。

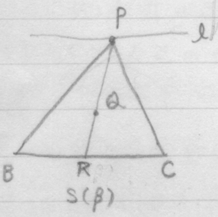
(証明)　回転角を十分小さくとれば　2より　S′(P)の頂点数は　S(P)以上となる。
平面βを少しだけ回転すれば　βは光線と平行でなくなるようにできるから



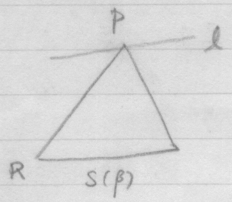


図のB5, B6, B3, B4 のどちらか一組が新しい頂点になることが容易にわかる。(例えば　βの属する平面で　B1, B2 に βの他の点が1方の側にくるように直線をひきそれを　S′で写像すればよい。)

Pが問題の条件を満たすとする
3から　βを光線に平行且つ　βのどの辺とも光線が平行でないようにすれば　その像　S(P)　は三角形でなければならない。
そこでその像の1つ　S(P)を作る(下図)　回転の軸をβに垂直に選び　Pを回転させる



この回転によって　S(X)のS(β)からの距離に変化はないから　Pを通り　S(β)に平行な直線 l をつくれば　他の S(X)はみなその一方側にくる。よって　P は常に頂点である。
△PBC 内の一点 Q に写像されるPの頂点 Q があったとする
光線に平行で　PQ を含む平面で　Pを切断し　その平面とβとの交わりで　$S^{-1}(Q)$ 側にある点を R とする。次にβを回転させて　R が S(β) の左端にくるようにする。(左図)　Pは凸だから　Q は　PR の外側にくるが　これは　S(P)が三角形であることに反するから　そのような点 Q はない。



(これは　β のある辺と光線が平行であっても少し回転すれば平行ではなくなり　しかも頂点の数はふえるか変わらないかだから　成り立つ)
故に　Pはβを底辺とする角すいで　β以外のすべての面は三角形で、しかも β は任意だったから

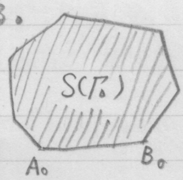
β 自身も三角形になる。従って P は三角すい　四面体である。
いいかえると

~ セミナー3月号 問2 ~

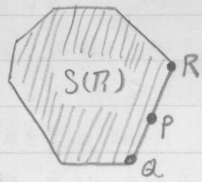
空間内に1平面αとそれに直交する平行光線を定める。図形Aのα上の正射影を$S(A)$とする。

凸立体Pのどの方向への正射影も多角形になるものとする。

凸立体Pをある位置においた時，それをP_0とする。（P_0に関する点は$A_0, B_0, \cdots$のように皆0をつけて表わす） $S(P_0)$は多角形になっているが（下図）その頂点のうち右図のA, Bのように隣り合ったものを一組とる。

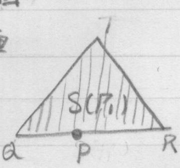


原像$S^{-1}(A_0)$，$S^{-1}(B_0)$のうちからそれぞれ一点ずつ選びA' B'を決める。すると線分$A'B'$はP_0の面上にある（Pが凸立体であることと，Pの内点は$S(P)$の内点にうつることから明らか） 次に$A'B'$が$S(P)$の境界上の一点に写されるようにPの位置を決めP_1とする。(この時A'はA'_1，B'はB'_1の点にくる) $S(A'_1)=S(B'_1)=P$とすれば$S(P_1)$は右図のようになる。



点Pののっている辺の端点の1つをQとする。（Pが頂点であれば隣り合う頂点をQ） Qの原像の1つをQ'_1（Pに対してはQ'）とすれば$\triangle A'B'Q'$はPの面上にある。（Pが凸立体であること 線分$A'B'$がPの面上にあること，Pの内点は$S(P)$の内点に写されることからわかる） PQを含む辺のQ以外の端をRとする（$P=R$でもよい）
Rの原像の1つをR'_1とする。そしてPがRと一致しない時はP_1をQRを軸にして少しだけ回転さす。ここでこの回転を充分小さくとり且つ回転の方向を適当に選べば$S(P_1)$の頂点に写されていたPの点はそのまま$S(P_2)$の頂点に，しかもA'，B'のどちらかの点の像が辺QRの外に出てくるから，（後で証明)※

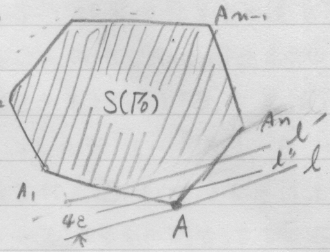
〈PとRが一致する時は面$A'B'Q'$と垂直な軸でPを少しだけ回転すれば3角形になるから$S(P_0)$も三角形〉 $S(P_1)$の頂点数は$S(P_2)$の頂点数よりも一以上少ない。もしPが問題の条件を満たすなら，これからただちに$S(P_1)$の頂点数は3である（$S(P_1)$は3角形である）とわかる（下図）



線分QRの原像は（QRがQPを含むことから）一つの面β（P面上の）とわかる。次にP_1を面βに垂直な軸で回転する。するとP_1をいくら回転しても前と同じようにしてその像$S(P_3)$は3角形であるとわかる。
しかも$S^{-1}(T)$は面βから一番遠い点（ただ一点だけであることは明らか）だから像$S(P_3)$の頂点にいつも写される。以上のことからPがすい体$\beta S^{-1}(T)$であることがわかる。（もしこのすい体外にPの点があれば$\triangle TS(\beta)$にはみだす点があるから。）
次にTが面βのかげにかくれ像に表われないようにPをおく（常に可能）

仮定から その像は 多角形（しかも3角形か4角形）で、その像は β の 斜めから平行像だから β は3角形か4角形である。したがって P は多面体であり β 以外の面はみな3角形である。そこで他の面をとって β と同じようにすれば β も3角形であることになる。故に P は4面体である。

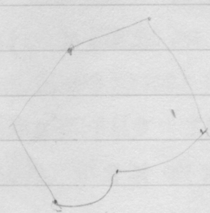
※の証明　どの方向からの正射影も多角形である凸立体 P をとり その位置を適当にきめ P_0 とし その像を $S(P_0)$（下図）とする。



$S(P_0)$ の任意の一頂点を A とする。A をとおって A 以外の点では $S(P_0)$ と交わらない直線 l を引く

$$\min d(A_i, l) = 4\varepsilon$$

とする。P_1 と P_0 の位置が少しだけしかちがわなければ（例えば P のすべての点 X に対して $d(X_1, X) < \varepsilon$）ならば $d(S(X_0), S(X_1)) < \varepsilon$ となる
l から $S(P_0)$ 側に 2ε の距離にある l' とすると l' の A の反対側に写されていた点はみな l から ε の距離にある l'' の A と反対側に写され A の原像は l'' の A 側に写されるから 直線 l' の A 側の点の原像の P_1 の像が新しい直線 l と垂直方向の最外部にくる。このようにして $S(P_0)$ の頂点数は $S(P_1)$ より小さいか同じかである。



$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i)(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) \qquad \left(\begin{array}{l} f \text{ は連続} \\ \varphi \text{ は単調増加} \end{array} \right)$$

分割 Δ … $s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i [\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]$, $S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i [\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]$

分割 Δ' … $s' = \sum_{i=0}^{n'-1} m_i' [\varphi(t_{i+1}') - \varphi(t_i')]$ $S' = \sum_{i=0}^{n'-1} M_i' [\varphi(t_{i+1}') - \varphi(t_i')]$

分割 $\Delta + \Delta'$ … $s'' = \sum_{i''=0}^{n''-1} m_i'' [\varphi(t_{i+1}'') - \varphi(t_i'')]$ $S'' = \sum_{i''=0}^{n''-1} M_i'' [\varphi(t_{i+1}'') - \varphi(t_i'')]$

すると明らかに $s'' \geq s$, $S'' \leq S$ $s'' < S''$

$s'' \geq s'$ $S'' \leq S'$

故に

$$s \leq S' , \quad s' \leq S$$

S の下限を $\underline{S}$
s の上限を $\overline{s}$ とすれば

$$s \leqq \overline{s} \leqq \underline{S} \leqq S \qquad (\text{すべての } S, s)$$

ところが

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) [\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]$$

$Max\ (t_{i+1} - t_i)$ を十分小さくすれば $(< \delta)$

任意に与えられた数 ε に対して

$$M_i - m_i < \varepsilon$$

となる。 故に

$$S - s \leqq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))$$
$$\leqq \varepsilon [\varphi(t_n) - \varphi(t_0)]$$

故に Δを細かくすれば $S - s \longrightarrow 0$

より

$$\overline{s} = \underline{S}$$

$\overline{s} = \underline{S} = I$ とすれば

$\Delta \to 0$ の時 $S, s \to I$

$s \leqq J \leqq S$ 故に $I = J$

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i)(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) \qquad \left(\begin{array}{l} f \text{ は連続} \\ \varphi \text{ は単調増加} \end{array}\right)$$

分割 Δ … $s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]$, $S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]$

分割 Δ' … $s' = \sum_{i'=0}^{n'-1} m_{i'}[\varphi(t_{i'+1}) - \varphi(t_{i'})]$ $S' = \sum_{i'=0}^{n'-1} M_{i'}[\varphi(t_{i'+1}) - \varphi(t_{i'})]$

分割 $\Delta+\Delta'$ … $s'' = \sum_{i''=0}^{n''-1} m_{i''}[\varphi(t_{i''+1}) - \varphi(t_{i''})]$ $S'' = \sum_{i''=0}^{n''-1} M_{i''}[\varphi(t_{i''+1}) - \varphi(t_{i''})]$

すると明らかに $s'' \geqq s$ $S'' \leqq S$ $s'' < S''$

$s'' \geqq s'$ $S'' \leqq S'$

故に

$$s \leqq S' , \quad s' \leqq S$$

S の下限を $\underline{S}$

s の上限を $\overline{s}$ とすれば

$$s \leqq \overline{s} \leqq \underline{S} \leqq S \qquad (\text{すべての } S, s)$$

ところが

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]$$

$\mathrm{Max}(t_{i+1} - t_i)$ を十分小さくすれば $(<\delta)$

任意に与えられた数 ε に対して

$$M_i - m_i < \varepsilon$$

となる。 故に

$$S - s \leqq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))$$

$$\leqq \varepsilon [\varphi(t_n) - \varphi(t_0)]$$

故に Δを細かくすれば $S - s \longrightarrow 0$

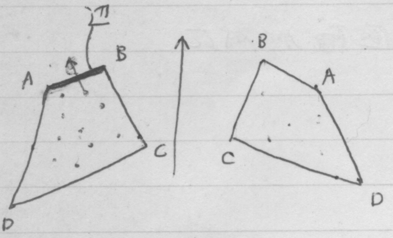
より

$$\overline{s} = \underline{S}$$

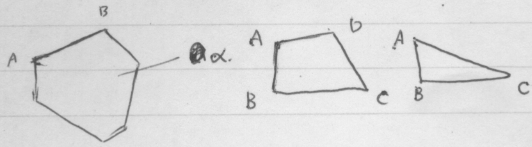
$\overline{s} = \underline{S} = I$ とすれば

$\Delta \to 0$ の時 $S, s \to I$

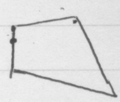
$s \leqq J \leqq S$ 故に $I = J$



1. 内の点が境界点になる.
2. 境界点が内の点になる
3. ~~内の点~~ 1と2が同時におこる
4 ~~境~~



m点が 内 → 境
n点が 境 → 内



周上に m 点がのる
周上に m+n 点がのる

左右端は必ず残る

○ 1点が境→内

○ ~~m点~~ 1点が 内 → 境 1点が 境 → 内