S
Z

NOTE BOOK

CONTAINING BEST RULED FOOLSCAP

数学雑記帳

No.23

第7部

洛　北

猪瀬博司

コクヨ

意匠登録　No.151492

NO.1	~~自由帳~~	S2	完
NO.2	~~自由帳~~	B5	完
NO.3	~~三角函数~~	S2	完
NO.4	~~代数~~	B3	完
NO.5	~~自由帳~~	B4	完
NO.6	~~数学雑記帳I~~	S3	完
NO.7	~~微分積分学~~	B5	完
NO.8	~~数表~~	B3	廃
NO.9	三角函数	B3	未
NO.10	数学雑記帳II	S3	完
NO.11	~~積分学~~	B5	廃
NO.12	微分積分とその応用	B3	完
NO.13	数学雑記帳III	S3	完
NO.14	~~数IIIA問題答~~	B3	未
NO.15	~~定理公式~~	B4	廃
NO.16	~~微分積分学~~	B4	廃
NO.17	数学雑記帳IV	B4	完
NO.18	級数	B4	未
NO.19	数学雑記帳V	B4	完
NO.20	方程式I（整方程式）	B3	完
NO.21	数学雑記帳VI	B5	完
NO.22	方程式II（不定方程式）		完
NO.23	数学雑記帳VII	B5	未
NO.24	~~函数論~~	B5	未
NO.25	代数学I	B4	完
NO.26	方程式III（整方程式＆微分方程式）		

PO.1　定理公式

NO.27	代数学II	B4	未
NO.28	行列 1.		完
NO.29	行列 2		未
NO.30	集合		未
NO.31	射影幾何		未

~ 函数論より ~

○ リーマンの球面

ガウス平面の原点で接する半径 $\frac{1}{2}$ の球面 K をリーマの球面という。
Kの北極をNとし、xy平面（ガウス平面）の任意の点PとNを結ぶ直線がKと交わる点をQとすればPとQは1対1に対応する。ここでガウス平面の無限遠点は1点と定義しておく。このように平面上の点を球面上の点に対応させることを極射影という。

点Pを表わす複素数を $x+iy$ とすればP点の空間座標は $P(x,y,0)$ である Qの座標を $Q(\xi,\eta,\zeta)$ とする。Nの座標は $N(0,0,1)$ である。

P, Q, Nは一直線上にあるから

$$\frac{x-0}{\xi-0}=\frac{y-0}{\eta-0}=\frac{0-1}{\zeta-1}$$

$$\therefore\quad x=\frac{\xi}{1-\zeta}\ ,\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta} \qquad (1)$$

リーマン球面Kの中心を $M(0,0,\frac{1}{2})$ とすれば

$$\xi^2+\eta^2+(\zeta-\tfrac{1}{2})=\left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

即ち

$$K:\quad \xi^2+\eta^2=\zeta-\zeta^2 \qquad (2)$$

故に (1) より

$$x^2+y^2=\frac{\zeta}{1-\zeta} \qquad \therefore\quad \zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} \qquad (3)$$

$$1-\zeta=\frac{1}{x^2+y^2+1} \qquad \therefore\quad \xi=\frac{x}{x^2+y^2+1} \qquad (4)$$

$$\eta=\frac{y}{x^2+y^2+1} \qquad (5)$$

これによって xy 平面からリーマン球面への対応がわかった。

定理　リーマン球面の2点A,Bをガウス平面上のa,bの極投影とすれば $\overline{AB}$ を a,b の球面距離といい [a,b] で表わす。

$$\overline{AB} = [a, b] = \frac{|a-b|}{\sqrt{(1+|a|^2)(1+|b|^2)}}$$

証明

$$a = x_1 + iy_1 \quad , \quad b = x_2 + iy_2$$

$$A = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \qquad B = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$$

とすれば

$$|a-b|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= \left(\frac{\xi_1}{1-\zeta_1} - \frac{\xi_2}{1-\zeta_2}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{1-\zeta_1} - \frac{\eta_2}{1-\zeta_2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(1-\zeta_1)^2(1-\zeta_2)^2}\Big[(\xi_1(1-\zeta_2) - \xi_2(1-\zeta_1))^2 + (\eta_1(1-\zeta_2) - \eta_2(1-\zeta_1))^2\Big]$$

$$= \frac{1}{(1-\zeta_1)^2(1-\zeta_2)^2}\Big[(\xi_1^2+\eta_1^2)(1-\zeta_2)^2 + (\xi_2^2+\eta_2^2)(1-\zeta_1)^2 - 2(1-\zeta_1)(1-\zeta_2)(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\Big]$$

$$= \frac{1}{(1-\zeta_1)^2(1-\zeta_2)^2}\Big[(\zeta_1-\zeta_1^2)(1-\zeta_2)^2 + (\zeta_2-\zeta_2^2)(1-\zeta_1)^2 - 2(1-\zeta_1)(1-\zeta_2)(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\Big]$$

$$= \frac{1}{(1-\zeta_1)(1-\zeta_2)}\Big[\zeta_1(1-\zeta_2) + \zeta_2(1-\zeta_1) - 2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\Big]$$

$$= \frac{1}{(1-\zeta_1)(1-\zeta_2)}\Big[\zeta_1 + \zeta_2 - 2\zeta_1\zeta_2 - 2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\Big]$$

$$\overline{AB}^2 = (\xi_1-\xi_2)^2 + (\eta_1-\eta_2)^2 + (\zeta_1-\zeta_2)^2$$

$$= (\xi_1^2+\eta_1^2) + (\xi_2^2+\eta_2^2) - 2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2) + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\zeta_1\zeta_2$$

$$= (\zeta_1-\zeta_1^2) + (\zeta_2-\zeta_2^2) - 2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2) + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\zeta_1\zeta_2$$

$$= \zeta_1 + \zeta_2 - 2\zeta_1\zeta_2 - 2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)$$

故に

$$\overline{AB}^2 = (1-\zeta_1)(1-\zeta_2)|a-b|^2$$

$$= \frac{|a-b|^2}{(1+x_1^2+y_1^2)(1+x_2^2+y_2^2)}$$

$$= \frac{|a-b|^2}{(1+|a|^2)(1+|b|^2)}$$

$$\therefore \quad \overline{AB} = \frac{|a-b|}{\sqrt{(1+|a|^2)(1+|b|^2)}}$$ （証明終）

注） $a = z \quad b = z + \Delta z$ ，$\overline{AB} = \Delta\sigma$ とおけば

$$\Delta\sigma = \frac{|\Delta z|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z+\Delta z|^2)}}$$

$\Delta z \to 0$ とすれば

$$d\sigma = \frac{|dz|}{1+|z|^2}$$

定理　ガウス平面上の円はリーマン球面上の円に対応しリーマン球面上の円はガウス平面上の円に対応する。

証）

ガウス平面上の円は次の式で表わされる。

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad (1)$$

（特に $A=0$ の時直線であるが直線は半径 ∞ の円とみなす）

先の公式を使うと（リーマン球面へ極射影する）

$$A\frac{\zeta}{1-\zeta} + B\frac{\xi}{1-\zeta} + C\frac{\eta}{1-\zeta} + D = 0$$

即ち

$$B\xi + C\eta + \zeta(A-D) + D = 0$$

これは ξ, η, ζ に対する一次式であるから一つの平面 π を表わす 故に

円(1)は平面πと球面Kとの交線に射影される。故にガウス平面上の円はリーマン球面Kの円に射影される。

又リーマン球面Kの任意の円はKと1つの平面π

$$\pi : \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta = 0$$

とリーマン球面との交線で与えられるガウス平面上への射影は公式より

$$\alpha\frac{x}{1+x^2+y^2} + \beta\frac{y}{1+x^2+y^2} + \gamma\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} + \delta = 0$$

即ち

$$(\gamma+\delta)(x^2+y^2) + \alpha x + \beta y + \delta = 0$$

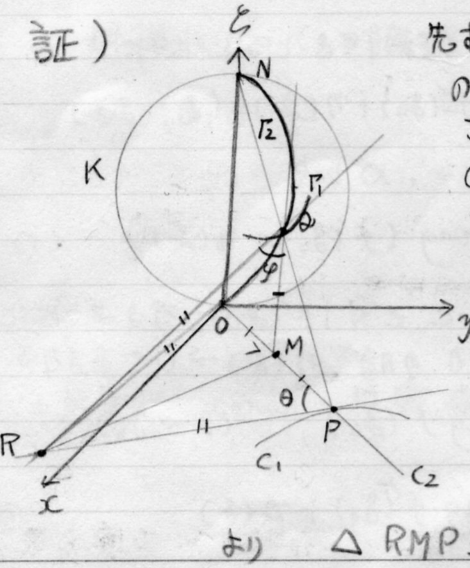
で円となる。　(証明終)

定理　ガウス平面上にあって一点Pで交わる二曲線をC_1 C_2としθをその交角とす。C_1 C_2がリーマン球面KのQで交わる二曲線Γ_1 Γ_2に射影されたとしその交角をφとすれば

$$\varphi = \theta \quad （等角性）$$

である。

証）



先ず特別の場合としてC_2が原点を通る直線の時を証明する
この時Γ_2はNとOを通る大円となる。P点を通るC_1の接線をPRとし、Q点におけるΓ_1, Γ_2の接線をおのおのQR, QMとする。Rと原点、及びMとを結ぶ。すると　$OM=MP=MQ$
(∵△OQPは直角三角形)　$\angle OMR = \frac{\pi}{2}$

∴　$RO = RP$

ところが　RO, RQは球面Kの2本の接線だから　$RQ = RO$　で上より　$RP = RQ$

より　$\triangle RMP \equiv \triangle RMQ$　で　$\varphi = \theta$　となる。

一般の場合は 直線OPと，C_1，C_2との交角をθ_1，θ_2とし OとQとを通る大円とΓ_1，Γ_2 との交角をφ_1，φ_2とすれば

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 \qquad\qquad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

である 先の証明より

$$\theta_1 = \varphi_1, \quad \theta_2 = \varphi_2 \text{ であるから}$$

$$\varphi = \theta \quad \text{となる}$$

（証明終）

○ 等角写像

定理　z_0を通る任意の二曲線 C_1，C_2 に対して w 平面で w_0 を通る二曲線Γ_1，Γ_2が対応したものとし，C_1，C_2の交角をθ，Γ_1，Γ_2の交角をφとすれば $f'(z_0) \neq 0$ なる時は符号も考えて

$$\varphi = \theta$$

である。

証）$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

より $$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + \eta(z)$$

と置けば $|z - z_0| < \delta$ ならば $|\eta(z)| < \varepsilon$ となる．故に

$$w - w_0 = f(z) - f(z_0) = (f'(z_0) + \eta(z))(z - z_0)$$

偏角を適当にとれば

$$\arg(w - w_0) = \arg(z - z_0) + \arg(f'(z_0) + \eta(z)) \qquad (1)$$

仮定より $f'(z_0) \neq 0$ であるから ε を $\varepsilon < |f'(z_0)|$ なるようにとれば $f'(z_0) + \eta(z) \neq 0$ である。$\delta \to 0$ の時 $\eta(z) \to 0$ であるから

$$\arg(f'(z_0) + \eta(z)) \to \arg f'(z_0), \qquad (z \to z_0)$$

故に $$\arg(f'(z_0) + \eta(z)) = \arg f'(z_0) + \rho(z)$$

とすれば

$z \to z_0$ の時　$\rho(z) \to 0$　故に (1) は

$$\arg(w - w_0) = \arg(z - z_0) + \alpha + \rho(z)$$

$$(\alpha = \arg f'(z_0)) \qquad \lim_{z \to z_0} \rho(z) = 0$$

となる $\rho(z)$ を無視すれば

$$\arg(w - w_0) \doteqdot \arg(z - z_0) + \alpha$$

$$\therefore\ \varphi \doteqdot \theta + \alpha$$

$$(\arg(w - w_0) = \varphi\ ,\ \arg(z - z_0) = \theta\ ,)$$

この式は　$z \to z_0$ の時等式となり　φ は Γ の u 軸に対する角
θ は　C の x 軸に対する角である。

$$\varphi = \theta + \alpha.$$

ここで　C_1, C_2,　Γ_1, Γ_2 を考えれば　φ_1, φ_2 を u 軸に対する w_0 接線がなす角　θ_1 θ_2 を C_1 C_2 の z_0 接線と x 軸がなす角とすれば　2曲線　Γ_1 Γ_2 の w_0 接線のなす角　φ　は

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad 又は \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

で　同様に C_1 C_2 の接線のなす角は

$$\theta = \theta_1 - \theta_2 \quad 又は \quad \theta = \theta_2 - \theta_1$$

ところが　$\varphi_1 = \theta_1 + \alpha$.,　$\varphi_2 = \theta_2 + \alpha$ であるから

$$\varphi = \theta$$

となる。

（注意）　const は定数を表わす。

$w=f(z)$を領域Dで正則としzがDの中を動けば w はw平面上の一つの領域Δを描く，今Dの中に一つの曲線Cを考えれば これはΔの中の一つの曲線Γに対応する。Cの上に相近き2点z，$z+\Delta z$をとりこれがΓの上の w，$w+\Delta w$に対応したとする zと$z+\Delta z$との間のCの弧の長さをΔs ，wと$w+\Delta w$との間のΓの弧の長さを$\Delta\sigma$とすれば$\Delta z\to 0$の時

$$\frac{\Delta s}{|\Delta z|}\to 1 \qquad \frac{\Delta\sigma}{|\Delta w|}\to 1 \qquad (1)$$

である。$f'(z)$が存在するが$\Delta z\to 0$の時

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}\to f'(z) \qquad 故に\ \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}\to |f'(z)| \qquad (2)$$

故に(1)，(2)より

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\to |f'(z)| \qquad \therefore\ \frac{d\sigma}{ds}=|f'(z)|$$

$$d\sigma=|f'(z)|\,ds$$

である　dsを$|dz|$，$d\sigma$を$|dw|$でかけば

$$|dw|=|f'(z)||dz| \qquad (3)$$

となる故にΓの長さをLで表わせば

$$L=\int_\Gamma d\sigma=\int_\Gamma |dw|=\int_C |f'(z)|\,ds=\int_C |f'(z)||dz|$$

$w=f(z)$は領域Dで正則とし $w=f(z)$ によってDがw平面上の領域Δに1対1対応されたとする。
今等距離δなる各座標軸に平行な直線を引いて，z平面を辺の長さδなる正方形にわけ その内で領域Dに含まれるものを考える。その内の1つをQとし Qの頂点を z，$z_1=z+\delta$，$z_2=z+i\delta$ ，$z_3=z+(\delta+i\delta)$とし これにΔのw，w_1，w_2，w_3を対応したとすると $\overrightarrow{zz_1}$，$\overrightarrow{zz_2}$ は直交するが等角性より曲線 ww_1とww_2とは直交する Qの写像をQ′とすれば その面積は大体

$$|w_1-w|\cdot|w_2-w|=|\Delta w_1|\cdot|\Delta w_2|$$

に等しい Ω, Ω' の面積を $|\Omega|$, $|\Omega'|$ で表わせば

$$|\Omega| = |z_1 - z|\,|z_2 - z_1| = |\Delta z_1| \cdot |\Delta z_2|$$

$$|\Omega'| \doteqdot |\Delta w_1| \cdot |\Delta w_2|$$

然るに $|\Delta w_1| \doteqdot |f'(z)| \cdot |\Delta z_1|$, $|\Delta w_2| \doteqdot |f'(z)| \cdot |\Delta z_2|$

であるから

$$|\Omega'| \doteqdot |f'(z)|^2 |\Delta z_1|\,|\Delta z_2| = |f'(z)|^2 \delta^2$$

これより

$w = f(z)$ は D で正則とし $w = f(z)$ により D が w 平面の領域 Δ に写像されたとすれば

$$|\Delta| = \iint_D |f'(z)|^2 \, dx\, dy \qquad (z = x + iy)$$

である。

○ 一次変換

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0) \qquad (1)$$

とすれば $f'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ であるから分母を0としない z に対して $f(z)$ は正則である。z 平面の z に対して w 平面の w を(1)によって対応させる変換を一次変換という。w を z 平面上の点で表わせば (1)は z 平面を自分自身に変換する。

$c \neq 0$ とすれば (1) は

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad {}^{*}z_3 = \frac{bc-ad}{c^2} z_2, \quad w = z_3 + \frac{a}{c}$$

の組合わせによって得られる $\dfrac{bc-ad}{c^2} = A e^{i\theta}$ とおけば

$$z_2' = A z_2, \qquad z_3 = e^{i\theta} z_2'$$

に *は更に分けられる。

$c=0$ の時も同様にすれば次の定理を得る

定理　一次変換　$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ は次の基本一次変換に分解できる。

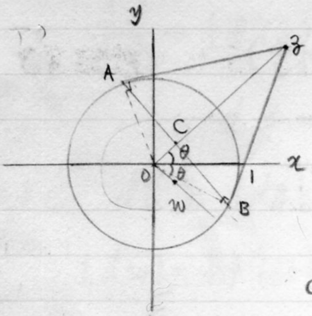
$$w=z+a\ ,\quad w=Az\quad (A>0)\ ,\quad w=e^{i\theta}z\ ,\quad w=\frac{1}{z}$$

(i)　$w=z+a$ は z をベクトル a だけ移動したものであるから $w=z+a$ は z 平面の平行移動を表わす。

(ii)　$w=Az$ は原点を中心として A 倍の相似変換を表わす。

(iii)　$w=e^{i\theta}z$ は原点を中心とし角 θ だけ z 平面を回転したものである。

(iv)　$w=\dfrac{1}{z}$ の z と w との対応点の作図は次に示す。

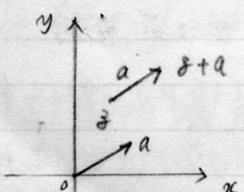


a) z が単位円の外にある時 単位円に共通接線を引き2接点を結ぶ直線 AB と Oz との交点を C とするこの点の x 軸に対称な点が $\frac{1}{z}$ なる点である。

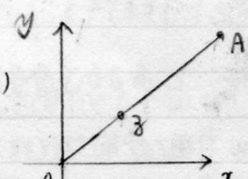
b) z が単位円の中の時，この時は a) と逆に操作すればよい。

c) z が単位円上の時，この時は円周上に $-\arg z$ なる点をとればよい。

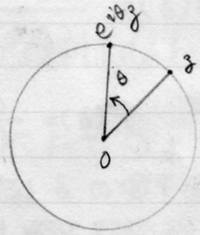
i)



ii)



(iii)



一次変換は任意の三点 $z_1\ z_2\ z_3$ の変換 $w_1\ w_2\ w_3$ によって一意的に決定する

この時

$$\frac{(w_1-w_3)(w_2-w_4)}{(w_1-w_4)(w_2-w_3)}=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)} \qquad (2)$$

が成り立つこの両辺を $[w_1, w_2, w_3, w_4]$，$[z_1, z_2, z_3, z_4]$ で表わしこれを4点の非調和比という。

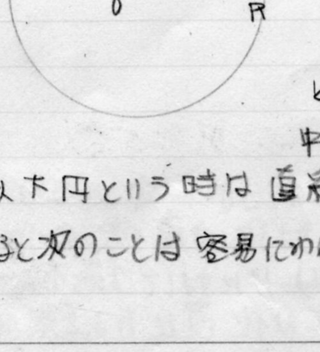
定理　四点の非調和比は一次変換によって不変である。

今
$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_2)(w_1-w_3)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_2)(z_1-z_3)} \tag{3}$$
を考えれば　w は z の一次変換である　更に (3) で　z_1 は w_1，z_2 は w_2　z_3 は w_3 に対応されるから次の定理を得る。

定理　任意の三点 z_1, z_2, z_3 を任意の3点 w_1, w_2, w_3 に移す一次変換は次に存在し
$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_2)(w_1-w_3)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_2)(z_1-z_3)}$$
によって与えられる。且つこれによって一次変換は一意的に決定する

注）もし $z_1=\infty$ ならば　　　　$w_1=\infty$ ならば
$$\frac{z-\infty}{\infty-z_3} = -1, \qquad \frac{w-\infty}{\infty-w_3} = -1$$
と規約する。

○　鏡像



中心O，半径Rの円Kの半径の延長線上に二点 $P_1 P_2$ をとり
$$OP_1 = r_1, \quad OP_2 = r_2$$
とする。もし
$$r_1 r_2 = R^2$$
ならば円Kに対して P_1 は P_2 の鏡像，P_2 は P_1 の鏡像という。P_1, P_2 を鏡像の位置にある二点という。
中心Oの鏡像は無限遠点であると規約する。

以下円という時は直線もこめるとする。

すると次のことは容易にわかる。

(i) 円Kに対して P_1, P_2 が鏡像の位置にあれば K上の任意の点 P に対して

$$\frac{PP_1}{PP_2} = 一定$$

(ii) 二定点 $P_1\ P_2$ からの距離の比が一定 $=(k)$ なる点 P の軌跡は1つの円で $P_1 P_2$ はこの円に対して鏡像の位置にある。

定理　一次変換 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ によって z 平面上の円 K は w 平面上の円 K' に移る この時円K に対して互に鏡像の位置にある2点 P, Q は円 K' に対して互に鏡像の位置にある2点 P', Q' に移る。

証明

$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ をとけば $z=\dfrac{dw-b}{-cw-a}$ となる

円Kに対して鏡像の位置にある2点を z_1, z_2 とすれば (i) より任意の z に対して

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = 一定 \quad (=k)$$

となるから

$$\left|\frac{\dfrac{dw-b}{-cw+a}-z_1}{\dfrac{dw-b}{-cw+a}-z_2}\right| = k$$

これを簡単にすれば

$$\left|\frac{w-\dfrac{az_1+b}{cz_1+d}}{w-\dfrac{az_2+b}{cz_2+d}}\right| = k\left|\frac{cz_2+d}{cz_1+d}\right| = 一定 \qquad (2)$$

$w_1=\dfrac{az_1+b}{cz_1+d}$　　$w_2=\dfrac{az_2+b}{cz_2+d}$ とすれば

$$\left|\frac{w-w_1}{w-w_2}\right| = 一定$$

となるから w は二点 w_1, w_2 よりの距離の比が一定となり (ii) より一つの円 K' を描き w_1, w_2 は K' に対して鏡像の位置にある。故に円Kは w 平面上の円 K' に移り Kに対して鏡像の位置にある2点 z_1, z_2 は K' に対して鏡像の位置にある2点 w_1, w_2.

に移る。(2)に於て $cz_1+d\neq 0$, $cz_2\neq 0$ 即ち $w_1\neq\infty$, $w_2\neq\infty$ と仮定したが

(i) $w_1=\infty$, $w_2\neq\infty$ 即ち $cz_1+d=0$, $cz_2+d\neq 0$ の時は(2)を変形して

$$\left|\frac{w(cz_1+d)-(az_1+b)}{w-w_2}\right|=k\,|cz_2+d|$$

とし ここで $cz_1+d=0$ とおけば

$$\left|\frac{az_1+b}{w-w_2}\right|=k\,|cz_2+d|$$

即ち $|w-w_2|=$ 一定

となり円Kの写像は w_2 を中心とする円となる。$w_1=\infty$ であるから w_1 と w_2 は規約によりこの円に対して鏡像の位置にある。

(ii) $w_1\neq\infty$, $w_2=\infty$ 即ち $cz_1+d\neq 0$, $cz_2+d=0$ の時

$$\left|\frac{w-w_1}{w(cz_2+d)-(az_2+b)}\right|=\frac{k}{|cz_1+d|}$$

として $cz_2+d=0$ とおけば

$$\left|\frac{w-w_1}{az_2+b}\right|=\frac{k}{|cz_1+d|}$$

となるから円Kの写像は w_1 を中心とする円となり w_1 と $w_2=\infty$ はこの円に対して鏡像の位置にある。(証明終)

天体の運動方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{Nx}{r^3} = 0 & (1) \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{Ny}{r^3} = 0 & (2) \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{Nz}{r^3} = 0 & (3) \end{cases}$$

（$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，Nは常数，tは時間）

但しNは万有引力の常数でその天体Mが座標$(0,0,0)$に位置しそれを回る天体mの質量は0と仮定する。

$(1) \times y - (2) \times y = 0$ より　$y\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$　(1)′

同様にして

$$z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \qquad (2)'$$

$$x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad (3)'$$

(1)′を積分して

$$\int y\frac{d^2x}{dt^2}\,dt - \int x\frac{d^2y}{dt^2}\,dt = C$$

$$y\cdot\frac{dx}{dt} - \int\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt}\,dt - x\cdot\frac{dy}{dt} + \int\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\,dt = C$$

より

$$y\cdot\frac{dx}{dt} - x\cdot\frac{dy}{dt} = C_1 \qquad (1)''$$

同様に

$$z\cdot\frac{dy}{dt} - y\cdot\frac{dz}{dt} = C_2 \qquad (2)''$$

$$x\cdot\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} = C_3 \qquad (3)''$$

$(1)'' z + (2)'' x + (3)'' y = c_1 z + c_2 x + c_3 y$

$$= zy\frac{dx}{dt} - xz\frac{dy}{dt} + xz\frac{dy}{dt} - xy\frac{dz}{dt} + xy\frac{dz}{dt} - yz\frac{dx}{dt}$$

$= 0$

$\therefore \quad c_1 z + c_2 x + c_3 y = 0$

即ち　天体 m は 座標 $(0, 0, 0)$ を含む一平面上で運動する。

従がってその平面を x, y と書き改めれば方程式 (1), (2), (3) は次の形で表わせる

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{Nx}{r^3} = 0 & (4) \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{Ny}{r^3} = 0 & (5) \end{cases}$$

($r = \sqrt{x^2+y^2}$, N は常数, t は時間)

前と同様にして

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = c \qquad (6)$$

が得られる 又

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2N}{r} - 2h \qquad (7)$$

が (4), (5) よりわかる　(6), (7) を極座標表示にかえれば

$$r\sin\theta \frac{d\,r\cos\theta}{dt} - r\cos\theta \frac{d\,r\sin\theta}{dt} = c$$

$$r\sin\theta\left(\cos\theta\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$- r\cos\theta\left(\sin\theta\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right) = c$$

$$-r^2\frac{d\theta}{dt} = c \qquad \therefore \quad r^2\frac{d\theta}{dt} = c \qquad (8)$$

(8) より

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

(7) は この左辺を微分して (4), (5) を代入して積分して得られる.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \int \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\, dt$$

(4), (5) を代入すると

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \int -2\frac{dx}{dt}x\frac{N}{r^3} - 2\frac{dy}{dt}y\frac{N}{r^3}\, dt + C'$$

$$= \int -\frac{2N}{r^3}\left(\frac{dx}{dt}x + \frac{dy}{dt}y\right) dt + C'$$

$$= \int -\frac{N}{r^3} \times \frac{dr^2}{dt}\, dt + C'$$

$$= \int -\frac{2N}{r^2}\frac{dr}{dt}\, dt + C'$$

$$= \int -\frac{2N}{r^2}\, dr + C'$$

$$= \frac{2N}{r} + C' \qquad C' = -2h \text{ として}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2N}{r} - 2h$$

一方 $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$ であるから

$$\frac{C^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = \frac{2N}{r} - 2h$$

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2N}{C^2 r} - \frac{2h}{C^2} - \frac{1}{r^2}$$

$\frac{1}{r} = u$ とおけば

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\frac{1}{u}}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} = -r^2\frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^4\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

より

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2N}{C^2}u - u^2 - \frac{2h}{C^2}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \sqrt{\frac{2N}{C^2}u - u^2 - \frac{2h}{C^2}}$$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2N}{C^2}u - u^2 - \frac{2h}{C^2}}}$$

$$\theta = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{N^2 - 2hC^2}{C^4}\right) - \left(u - \frac{N}{C^2}\right)^2}}\,du$$

$$= \int \frac{\frac{\sqrt{N^2 - 2hC^2}}{C^2}\cos\delta}{\frac{\sqrt{N^2 - 2hC^2}}{C^2}\cos\delta}\,d\delta$$

$$= \delta + D$$

$$u - \frac{N}{C^2} = \frac{\sqrt{N^2 - 2hC^2}}{C^2}\sin\delta$$

$$\frac{du}{d\delta} = \frac{\sqrt{N^2 - hC^2}}{C^2}\cos\delta$$

$$du = \frac{\sqrt{N^2 - hC^2}}{C^2}\cos\delta\,d\delta$$

$$u - \frac{N}{C^2} = \frac{\sqrt{N^2 - 2hC^2}}{C^2}\sin(\theta - D)$$

$$u = \frac{N}{C^2} + \frac{\sqrt{N^2 - 2hC^2}}{C^2}\sin(\theta - D)$$

$$r = \frac{C^2}{N + \sqrt{N^2 - 2hC^2}\sin(\theta - D)}$$

四方陣の相似変換

11	12	24	21
14	13	23	22
42	43	33	34
41	44	32	31

l

大 $\frac{\pi}{2}$ 回転合同変換　P　O回転

逆合同変換　B　l 対称

小 $\frac{\pi}{2}$ 回転非同変換　S　O' 回転

(i, j) 要素変換公式

$P(i, j) = (i+1, j)$

$B(i, j) = \{ i-(-1)^i , j+(-1)^j+1 \}$

$S(i, j) = (i, j+1)$　　（数値は mod 4 で計算）

これより

$P^4 (i, j) = (i, j) \dashrightarrow$ 恒等変換 $(=1)$

$B^2 (i, j) = (i, j)$

$S^4 (i, j) = (i, j)$

$PB (i, j) = \{ i-(-1)^i+1 , j+(-1)^j+1 \}$

$BP (i, j) = \{ i+1-(-1)^{i+1} , j+(-1)^j+1 \}$

$\therefore \quad PB \neq BP$

$BP_j = PB_j \qquad BP_i + 2 = PB_i$

$SP = PS$

$BS (i, j) = \{ i-(-1)^i , j+2-(-1)^j \}$

$SB (i, j) = \{ i-(-1)^i , j+2+(-1)^j \}$

$BS_i = SB_i \qquad SBS_j = B_j \qquad S^n B S^n_j = B_j \quad (BS^n_j = -S^n B)$

$(BS)^2 = 1 \{ i, j \} \qquad (SB)^2 = 1 (i, j)$

変換の公式

I　P 変換　$P(i, j) = (i+1, j)$

即わち　$P_i = E$　　$P_j = 1$

II　B 変換　$B(i, j) = (i-(-1)^i,\ j+(-1)^{j+1})$

即ち　$B_i = RE^2 = E^2R$,　$B_j = ER = RE^3$

III　S 変換　$S(i, j) = (i, j+1)$

即ち　$S_i = 1$　　$S_j = E$

① $P^4 = 1$　　$\because P^4(i, j) = (i+4, j) = (i, j)$

② $B^2 = 1$　　$\because B^2(i, j) = \{ i-(-1)^i-(-1)^{i-(-1)^i},\ j+(-1)^j+2+(-1)^{j+(-1)^j}$

$= (i, j)$

③ $S^4 = 1$　　$\because S^4(i, j) = (i, j+4) = (i, j)$

④ $P^n B P^n = B$　or　$BP^n = P^{-n}B$

or　$P^n B = BP^{-n}$

⑤ $S^n B S^n = B$　or　$BS^n = S^{-n}B$

or　$S^n B = BS^{-n}$

⑥ $PS = SP$

⑦ $(SB)^2 = SBSB = B^2 = 1$

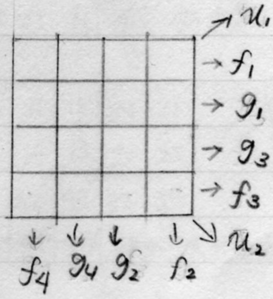
$(BS)^2 = BSBS = B^2 = 1$

⑧ $R^2 = 1$　　$E^n R E^n = R$　　$RE^n = E^{-n}R$

$E^n R = RE^{-n}$

注　E … $+1$ 作用素

R … $+(-1)^x$ 作用素



$$\begin{cases} P(f_i) = f_{i+1} \\ P(g_i) = g_{i+1} \\ P(u_i) = u_{i+1} \\ B(f_i) = f_{i+1-(-1)^i} \\ B(g_i) = g_{i+1-(-1)^i} \\ B(u_i) = u_{i+1} \end{cases}$$

単位作用素

Ⅰ　E　　$+1$ 作用素　　（加法作用素）

Ⅱ　T　　$\times 3$ 作用素　（$\times(-1)$）　（乗法作用素）

$$\begin{cases} P = (E,\ 1) \\ B = (E^2T,\ E^{-1}TE) \\ S = (1,\ E) \end{cases}$$

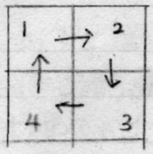
$$ET = \bigcirc \times 3 + 1$$
$$TE = (\bigcirc + 1) \times 3 = \bigcirc \times 3 - 1$$
$$ETE = E^{-1}ET = T$$

$$E^nTE^n = T \qquad \therefore \quad E^nT = TE^{-n}$$
$$TE^n = E^{-n}T$$

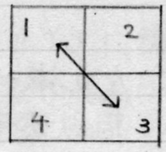
$$\begin{cases} T^2 = \bigcirc \times 9 = \bigcirc \times 1 = 1 \\ E^4 = \bigcirc + 4 = \bigcirc + 0 = 1 \end{cases}$$

$$E^2T = TE^2 \qquad E^3T = TE$$
$$ET = TE^{-1} \qquad E^{-2}T = TE^2$$
$$E^{-1}T = TE \qquad E^4T = T$$

$$\begin{cases} V = (E, 1) \\ v = (1, E) \\ W = (T, 1) \\ w = (1, T) \end{cases}$$



A B



C D

$P = V \qquad B = V^2 W \; w v^2 \qquad S = v$

$$\begin{cases} V^n W = W V^{-n} & v^n w = w v^{-n} \\ W V^n = V^{-n} W & w v^n = v^{-n} w \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ll} Vv = vV & Vw = wV \\ Wv = vW & Ww = wW \end{array} \right.$$

V …… $\frac{\pi}{2}$対称　v …… $\frac{\pi}{2}$極称　W …… 斜対称, w; 斜偶称

V^2 … 対称　v^2 …… 極称

V^3 …… $-\frac{\pi}{2}$対称　v^3 …… $-\frac{\pi}{2}$極称

VW …… 曲進　vw …… 折回

V^2W …… 正対称　v^2w …… 小対称

V^3W …… 曲退　v^3w …… 折転

条件方程式

方陣のたて行を $1, 2, 3, \cdots, n$　横行を $1'\ 2'\ 3'\ 4' \ \ n'$

とする時　たての a 行と横の b' 行の交差する点を (a, b') とする。

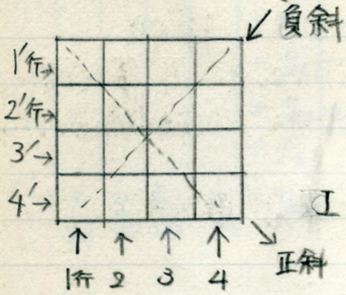
対角線を問題としない方陣のある相似変形を f とする時
任意の x 行 u' 行に関に

$f(x) \to y \qquad f(u') \to v'$

又は　$f(x) \to y' \qquad f(u') \to v$ が成り立ち且つ

$f(x, u') = (y, v')$　又は　$f(x, u') = (y', u)$

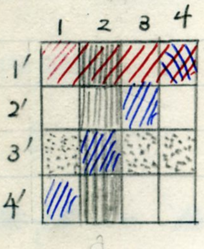
四方陣の列の変換



左の様に方陣の各行を命名する。
相似変換の数とその形をすべてあげる。

I 方陣の列の相似変換に於て行が斜には変換しない。

[証明]



左図に於て第1'行が負斜(青)に変換したとする。次に第2行と第3行のどちらかは正斜に変換しない。この変換しない方の行を取るとそれは縦行か横行のどちらかに変換されている(≡)これと負斜との交マスの数字はもとの1'行と第2行か第3行の交マスの数字に等しいはずである。ところが負斜と(≡)の他にその地点では(⁝⁝)が交わるはずである。この⁝⁝と≡との交マスは(1',2)か(1',3)に等しい数が来⁝⁝という行が1'行か2行or3行から変換されたことになりそれぞれの変換は⁝⁝と等しくないからこれは不合理である。
以下同様にしてすべての行と斜について証明される。

重複度と斜と行の証明

II 横行がすべて横行に変換され縦行がすべて縦行に変換されるか
横行がすべて縦行に変換され縦行がすべて横行に変換される。

[証明]

1横行が1横行に変換されたとする。変換前には縦行と横行が交わっていたのだからその1つの横行に交わっていた4本の縦行は変換後も交わっていなくてはならない。即ちすべての縦行はすべての縦行に変換される。残りの横行はもちろん皆横行に変換される。
1横行が1縦行に変換された時も同様にして証明される。

IIより $\frac{\pi}{2}$ 回転を頭にいれればすべての横行を横行に変える変換を調べれば充分なことがわかる。

条件

(n, n') は (n_1, n_1') 又は $(n_2, (1-n_2)')$ に必ず変換され

前者の場合 $(m, (1-m)')$ は 必ず $(m_1, (1-m_1)')$ に変換される。

又後者の場合 $(m, (1-m)')$ は 必ず (m_2, m_2') に変換される。

以上の条件が満足されれば列の変換は必ず相似変換となる。

相似変換

i　1行 → 1行の時　$(1, 1') \rightarrow (1, 1')$ or $(1, 4')$

$(1, 4') \rightarrow (1, 4')$ or $(1, 1')$

故に　$1'$行 → $1'$行 or $4'$行

a)　$1'$行 → $1'$行の時

$4'$行 → $4'$行　　4行 → 4行

$(4, 4') \rightarrow (4, 4')$

$(2, 3') \rightarrow (2, 3')$ or $(3, 2')$

故　2行 → 2行 or 3行

$3'$行 → $3'$行 or $2'$行

$$\left(\begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 1' \rightarrow 1' \\ 4' \rightarrow 4' \\ 4 \rightarrow 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 2 \rightarrow 2 \text{ or } 3 \\ 3 \rightarrow 3 \text{ or } 2 \\ 2' \rightarrow 2' \text{ or } 3' \\ 3' \rightarrow 3' \text{ or } 2' \end{array}\right.$$

（2通り）

b)　$1'$行 → $4'$行の時

$4' \rightarrow 1'$　　$4 \rightarrow 4$

$(2, 3') \rightarrow (2, 2')$ or $(3, 3')$

$(3, 2') \rightarrow (3, 3')$ or $(2, 2')$

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 1' \rightarrow 4' \\ 4' \rightarrow 1' \\ 4 \rightarrow 4 \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{l} 2 \rightarrow 2 \text{ or } 3 \\ 3 \rightarrow 3 \text{ or } 2 \\ 2' \rightarrow 3' \text{ or } 2' \\ 3' \rightarrow 2' \text{ or } 3' \end{array}\right.$$

（2通り）

ii 1行 → 2行

(1, 1′) → (2, 2′) or (2, 3′)
(1, 4′) → (2, 3′) or (2, 2′)

a) 1′ → 2′, 4′ → 3′ の時

(2, 3′) → (1, 4′) or (4, 1′)
(3, 2′) → (4, 1′) or (1, 4′)

$\therefore \begin{cases} 2 \to 1 \text{ or } 4 \\ 3 \to 4 \text{ or } 1 \\ 2' \to 1' \text{ or } 4' \\ 3' \to 4' \text{ or } 1' \end{cases}$ 　4 → 3

2 通り

b) 1′ → 3′, 4′ → 2′ の時

(2, 3′) → (1, 1′) or (4, 4′)
(3, 2′) → (4, 4′) or (1, 1′)

∴ 2 → 1 or 4　　2′ → 4′ or 1′
3 → 4 or 1　　3′ → 1′ or 4′
4 → 3

2 通り

iii 1行 → 3行

(1, 1′) → (3, 3′) or (3, 2′)
(1, 4′) → (3, 2′) or (3, 3′)　　4 → 2

a) 1′ → 3′, 4′ → 2′ の時

(2, 3′) → (1, 4′) or (4, 1′)
(3, 2′) → (4, 1′) or (1, 4′)

∴ 3′ → 4′ or 1′　　3 → 4 or 1
2 → 1 or 4　　2′ → 1′ or 4′

2 通り

b) 1′ → 2′, 4′ → 3′ の時

(2, 3′) → (1, 1′) or (4, 4′)
(3, 2′) → (4, 4′) or (1, 1′)

2 通り

∴ 3′ → 1′ or 4′　　3 → 4 or 1
2 → 1 or 4　　2′ → 4′ or 1′

iv 1行 → 4行　　　　4 → 1

$(1, 1') \to (4, 4')$ or $(4, 1')$
$(1, 4') \to (4, 1')$ or $(4, 4')$

a) $1' \to 4'$, $4' \to 1'$ の時

$(2, 3') \to (2, 3')$ or $(3, 2')$
$(3, 2') \to (3, 2')$ or $(2, 3')$

∴ $2 \to 2$ or 3　　$3 \to 3$ or 2　　　2 通り
$3' \to 3'$ or 2　　$2' \to 2'$ or $3'$

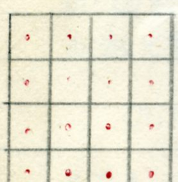
b) $1' \to 1'$, $4' \to 4'$

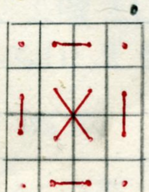
$(2, 3') \to (2, 2')$ or $(3, 3')$
$(3, 2') \to (3, 3')$ or $(2, 2')$

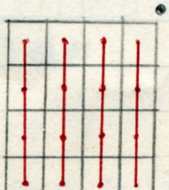
∴ $2 \to 2$ or 3　　$3 \to 3$ or 2　　　2 通り
$3' \to 2'$ or $3'$　　$2' \to 3'$ or $2'$

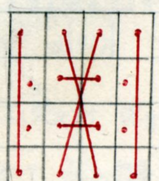
以上 16 通りの変換が条件を満足していることは確かめれば容易にわかる。又これとこれを $\frac{\pi}{2}$ 回転した 16 個の変換以外の変換は相似変換ではない。

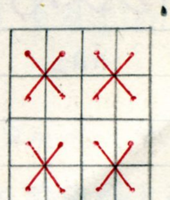
よって相似変換は皆で 32 個存在する。
次にその図を次に並べる。

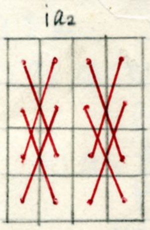

(I) ia₁ (合同)

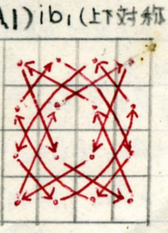

ia₂

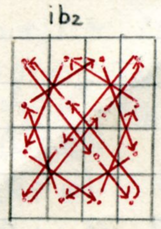

(A1) ib₁ (上下対称)

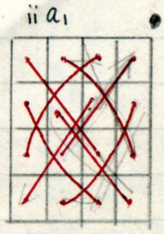

ib₂

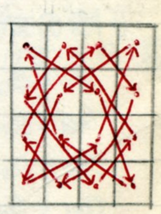

ii a₁

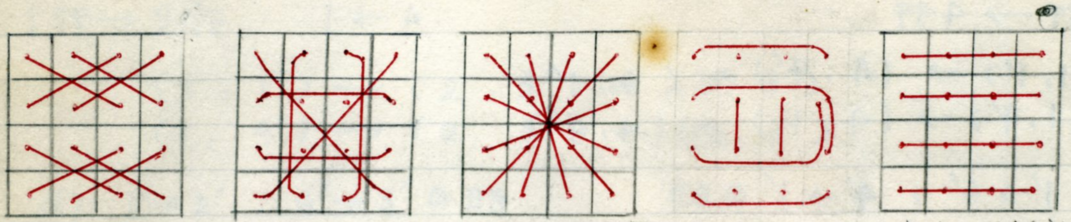

ii b₁


ii b₂

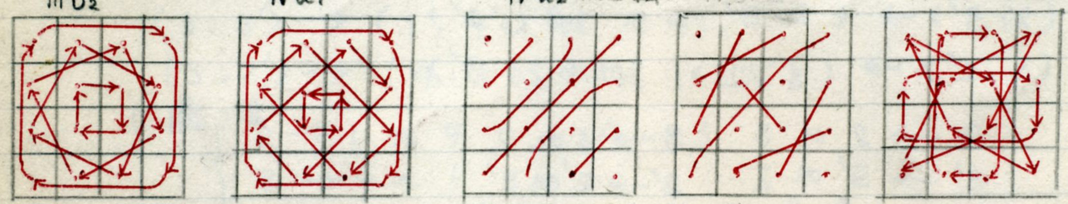

iii a₁


iii a₂

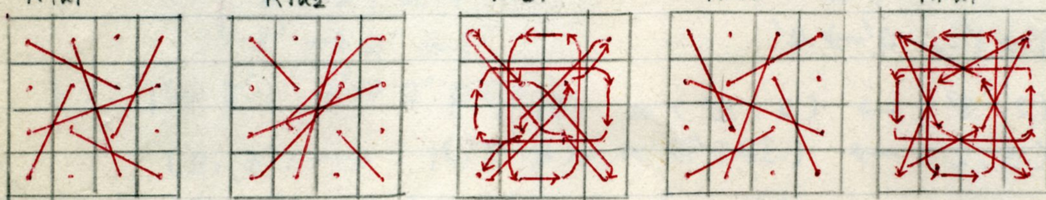

iii b₁



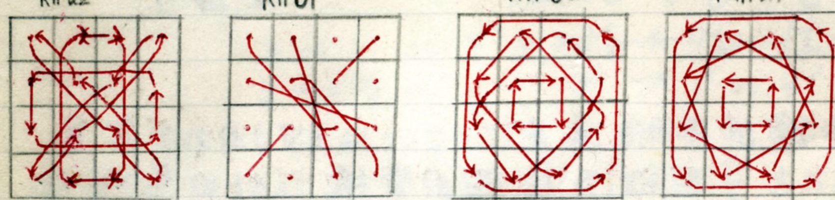
iiib_2 iva_1 iva_2（九回転） ivb_2（左右対称）(A2)



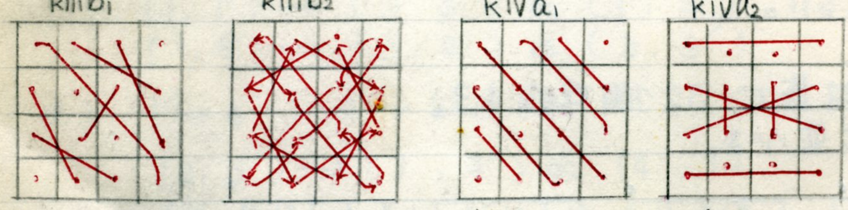
kia_1 kia_2 kib_1 kib_2 kiia_1



kiia_2 kiib_1 kiib_2 kiiia_1 kiiia_2



kiiib_1 kiiib_2 kiva_1 kiva_2



kivb_1 iia_2 kivb_2 ivb_1

○ 方陣の対をなす数の位置関係

方陣の式

$$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=34 \qquad a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{41}=34$$
$$a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}=34 \qquad a_{12}+a_{22}+a_{32}+a_{42}=34$$
$$a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}=34 \qquad a_{13}+a_{23}+a_{33}+a_{43}=34$$
$$a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}=34 \qquad a_{14}+a_{24}+a_{34}+a_{44}=34$$

$a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}=34$
$a_{14}+a_{23}+a_{32}+a_{41}=34$

に於て対になる数 $A+B=17$ をそれぞれ入れかえると
それでも各式は成り立つ. 故に

9月 函数論の構成

証明

$x_1x_2x_3x_4\cdots x_n=1$ ならば $x_1+x_2+\cdots+x_n\geqq n$
$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$

$n=1$ の時 $x_1=1$ $x_1\geqq 1$ より成立
$n=2$ の時 $x_1x_2=1$ $x_1+x_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+4x_1x_2}\geqq 2$

$n=k$ の時成立すると仮定する。
すると $x_1\cdots x_k=1$ $x_1+x_2+\cdots+x_k\geqq k$ (1)
これを使い $x_1\cdots x_{k+1}=1$ の時 $x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}\geqq k+1$
を証明する まず $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$ $(k\geqq 2)$ の中には1よりも大きいものが2個以上ある。1よりも小さいものが2個以上ある。すべて1である。のうちの少なくとも1つは成り立つ。第3番目の場合はすでに条件を満たしているから証明はいらない。次に第1第2番目の時はその2個以上ある中の適当な2個をとって(例えば x_1,x_2 とする) それらの積を1つの数と考えて(1)を使うと

$(x_1x_2)x_3x_4\cdots x_{k+1}=1$ $x_1x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{k+1}\geqq n$

となる。ところが x_1x_2 の取り方から $x_1x_2\geqq x_1+x_2-1$ である。
なぜかというと $x_1x_2-x_1-x_2+1=(x_1-1)(x_2-1)$
で x_1,x_2 はともに1より大きいか小さいかのいずれかでいずれの場合でも $(x_1-1)(x_2-1)\geqq 0$ である。
即ち $x_1x_2\geqq$

I　$x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ の時　$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqq n$

$x_1, \cdots, x_n > 0$

$n=1$ の時　$x_1 = 1$　$\therefore$　$x_1 \geqq 1$　成立

$n=k$ の時 成り立つとする。

すると　$x_1 \cdots x_k = 1$　$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geqq k$　(1)

今　$x_1 \cdots x_{k+1} = 1$ とする. すると このうち全部が1である以外は

1より小さいもの 1より大きいものが少なくてもそれぞれ1個以上ある。
それぞれのうちより 1個とりだして(例えば $x_1 x_2$) その積を1つのもの
と考えて(1)を使う。

$(x_1 x_2) \cdots x_{k+1} = 1$ ならば　$x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} \geqq k$　(2)

ところが　$x_1 x_2$ の取り方から　$x_1 x_2 < x_1 + x_2 - 1$
なぜかというと　$x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$
となり　$x_1 - 1$ は負　$x_2 - 1$ は正となるから　$(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$
従がって　$x_1 x_2 < x_1 + x_2 - 1$
これを(2)に代入して

$x_1 \cdots x_{k+1} = 1$ ならば

$$x_1 + x_2 - 1 + x_3 + \cdots + x_{k+1} > x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} \geqq k$$

$$\therefore\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} - 1 > k$$

で　$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} > k+1$$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$ の時は前より等号が成り立つから結局

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} \geqq k$$

等号は　$x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$ の時に限る。

(証明終)

○　$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqq \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ を証明せよ

$(a_1, a_2, \cdots, a_n > 0)$

$x_1 = \dfrac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$,　$x_i = \dfrac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$ として I を使うと

$x_1 \cdots x_n = 1$ よって $x_1 + \cdots + x_n \geqq n$

もとの式に入れかえて

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} \geqq n \quad \therefore \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ の時のみ成立

○ $$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqq g \leqq \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ $\alpha < 0 < \beta$

$$g = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

を証明せよ

$$\frac{a_1^\gamma + a_2^\gamma + \cdots + a_n^\gamma}{g^\gamma} \geqq n \quad \left(x_1 = \frac{a^\gamma}{g^\gamma} \quad x_i = \frac{a_i^\gamma}{g^\gamma} \text{ とする}\right)$$

$$\therefore \frac{a_1^\gamma + a_2^\gamma + \cdots + a_n^\gamma}{n} \geqq g^\gamma$$

ここで γ が負の時 $(=\alpha)$ は

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqq g$$

で γ が正の時 $(=\beta)$ は

$$\left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \geqq g$$ 証明終わり

等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ の時成立

注 $$g = \lim_{x \to 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \to \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

II　$a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$　，$\alpha < \beta$ ならば

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqq \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ の時成立

$$(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}(a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \geqq n^{-\frac{1}{\alpha}} n^{\frac{1}{\beta}}$$

を証明すればよい。

8月29日　数学新書 → 借　ペルの方程式

〃　上の証明

色鉛筆

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dx$$

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} \log t \cdot t^{x-1} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \log t \, dt$$

$$S_x = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\int_0^\infty \log t \cdot e^{-t} \cdot t^{x-1} dt}{\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt}$$

○ $f(x) - f(x-1) = \frac{1}{x}$

$\Gamma(x) = x\Gamma(x-1)$ （公式）

$$\log \Gamma(x) - \log \Gamma(x-1) = \log x$$

$$\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} - \frac{d \log \Gamma(x-1)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x-1)}{\Gamma(x-1)} = \frac{1}{x}$$

$\therefore \quad f(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \qquad \Gamma \quad \psi(1) = 1.$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

$\gamma = 0.57721\,56649\,01532\,86060 -$ （オイラーの定数）

$$\log \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{2}\log(2\pi) + 2\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}\left(\frac{t}{x}\right)}{e^{2\pi t} - 1} dt$$

$\Re x > 0$

$$\log\Gamma(x) \sim \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n-1)2n\,x^{2n-1}}$$

$$\Gamma(x+1) = x! \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$$

ポリア函数

○ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$\therefore$ $\log\Gamma(x+1) = \log\Gamma(x) + \log x$

$$\log\Gamma(x+1) - \log\Gamma(x) = \log x$$

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x}$$

※ $f(x+1) - f(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(1) = a_0$ とすると

$$f(n) = f(n-1) + \frac{1}{n-1}$$

$$= \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3} + \cdots + 1 + a_0$$

$\therefore$ $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n-1} = \psi(n) - a_0$

$a_0 = 0.57721566490153286060\cdots$

Dirichlet → ディリクレ

○ ベルヌイの数

1	-0.5	22	6192.12318
$n=2$	$0.16666 \to \frac{1}{6}$	24	-86580.25311
$n=4$	$-0.03333 \to -\frac{1}{30}$	26	1425517.16666
6	0.02380	28	-27298231.06781
8	-0.03333	30	601580873.90064
10	0.07575		
12	-0.25311		
14	1.66666		
16	-7.09215		
18	54.97117		
20	-529.12424		

○ オイラーの数

$0 \to$	1	10	-50521	20	370371188237525
2	-1	12	2702765		
4	5	14	-199360981		
6	-61	16	19391512145		
8	1385	18	-2404879675441		

○ ベルヌイの多項式

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

$$B_n = B_0 x^n + \binom{n}{1} B_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} B_2 x^{n-2} + \cdots + B_n$$

$B_n(0) \to B_n$ （ベルヌイの数）

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} B_n(x) = n B_{n-1}(x)$$

◦ オイラーの多項式

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

$$E_n(x) = a_0x^n + \binom{n}{1}a_1x^{n-1} + \binom{n}{2}a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$$

$$a_k = E_k(0) \qquad \frac{2}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{t^n}{n!}$$

又は $E_n \equiv \sum_{\mu=0}^{n} 2^{\mu}\binom{n}{\mu}\alpha^{\mu}$ $\qquad \frac{2}{e^x+e^{-x}} = \sum_{n=a}^{\infty}\frac{E_{2n}}{n!}x^n$

$\uparrow$

オイラーの数

$$\operatorname{sech} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}x^n \qquad E_n(x) + E_n(x+1) = 2x^n$$

$$E_n(-x) = (-1)^n E_n(x), \qquad \frac{d}{dx}E_n(x) = nE_{n-1}(x)$$

～相似変換の証明～　（ここで述べる相似変換は総て位置的である）

A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	B_2	B_3	B_4
C_1	C_2	C_3	C_4
D_1	D_2	D_3	D_4

左の図のように名の命

〔$A_1\ A_2\ A_4\ B_1\ B_2\ C_1\ C_2$〕

ですべての要素を表わす。

$$
\begin{cases}
A_1 = A_1 & B_1 = B_1 \\
A_2 = A_2 & B_2 = B_2 \\
A_3 = 34 - A_1 - A_2 - A_4, & B_3 = A_1 + B_1 + C_1 - C_2 - A_4 \\
A_4 = A_4 & B_4 = 34 - A_1 - 2B_1 - B_2 - C_1 + C_2 + A_4 \\
C_1 = C_1 & D_1 = 34 - A_1 - B_1 - C_1 \\
C_2 = C_2 & D_2 = 34 - A_2 - B_2 - C_2 \\
C_3 = 34 - A_1 - B_1 - C_1 - B_2 + A_4, & D_3 = B_2 + C_2 + A_1 + A_2 + A_4 - 34 \\
C_4 = A_1 + B_1 + B_2 - C_2 - A_4, & D_4 = B_1 + C_1 - A_4
\end{cases}
$$

この $A_1 \cdots D_4$ の内の4個の和が恒等的に34になるような組をすべてあげる

（ただし 〔$A_1\ A_2\ A_4\ B_1\ B_2\ C_1\ C_2$〕の中ではどの4個の和も恒等的に34にならない。∵そうでないとその中の一つが他の一次結合で表わされ従がって基が6個で済む，ところが方陣の独立条件は9個であるから基はどうしても7個必要である。これは不合理である。）

方陣の基本条件　行4ケ　列4ケ　斜2ケの合計10ケ

外放　$A_1 + A_4 + D_1 + D_4 = 34$，　内放　$B_2 + B_3 + C_2 + C_3 = 34$　　(1)
縦対　$A_2 + A_3 + D_2 + D_3 = 34$　　横対　$B_1 + B_4 + C_2 + C_3 = 34$

ある1つの要素の上の14ケの組に含まれる数をその要素の重複度という。
重複度は斜に属するものが4　属さないものが3である。左図
相似変換に於て社の14ケの組はやはりその上に変換する。(恒等性)
従がって　1つの行は　行，列，斜，放，対　のいずれかに変換されなければならない。（他も同様）

4	3	3	4
3	4	4	3
3	4	4	3
4	3	3	4

重複度

定理 I　重復度４の地点にあった要素は重復度４の地点へ
重復度３の地点にあった要素は重復度３の地点へ　変換される。

[証明]

方陣の相似変換によって(1)の式群は不変である。即ち (1)の式中に４度表われるものは変換後も４度表われる。３度も同様

この定理によって行が斜，放，対に変換されないことが容易にわかる。
又同様なことが　斜は行，列，対に変換されないことがわかる。
すべてについて同様にし以上をまとめると

行・列 ⟶ 行・列
斜 ⟶ 斜・放
対 ⟶ 対
放 ⟶ 斜・放

更に　斜 ⟶ 放はありえない

なぜかというと列行 → 行,列　であるから 放の２要素を有する行が変換前にはやはり行か列である。ところが 行又は列と斜はすべて１要素を共有するだけであるから　このような行はありえない。

従がって同様なことが　放 → 斜にもいえ
斜 → 斜，　放 → 放　である。

今述べたような交点の数を 放と斜の交わりと呼び

(放斜)　と書く

但し ~~幾~~ 通りもの交わりが考えられる時はそのうち最大のものを交わりと呼ぶ

(行列)＝1，(行行)＝4　(対対)＝4，(対放)＝0，(斜対)＝0
(列列)＝4，(放斜)＝2　(放放)＝4，(斜斜)＝4，(行斜)＝1
(列斜)＝1，(対行)＝2　(放行)＝2，(対列)＝2，(放列)＝2

行を上から　f_1　f_2　f_3　f_4
列を左から　g_1　g_2　g_3　g_4
斜を正負の順で　h_1，h_2
対を縦横の順で　j_1，j_2
放を内外の順で　k_1，k_2

として記号を用いる。

以上より f_i が g_i に変換されると

$(f_i, g_\alpha)=1$ であるから $(g_i, \sigma g_\alpha)=1$ で
$(\alpha=1,\ldots,4)$

g_α $(\alpha=1,2,\ldots,4)$ は f_β $(\beta=1,\ldots,4)$ に変換されなければならない。

○ f が g に1つでも変換されればすべての g は f に変換され、従がって すべての f が g に変換される。

以上により前に述べた変換32種が導びける。又これより次のことがいえる

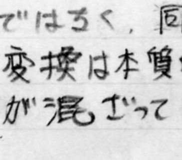
定理 II 四方陣の相似変換は前述の32種のうちのどれかでなくてはならない。又この32種は皆相似変換である。(相似変換は位地的とする)

ここで得られた相似変換はあくまで位置的な相似変換である。
具体的に言うと、つまり、方陣の条件により、どの位置のものが常に加えて34になる性質をもっているかということであった。位置の変換であった。
ある一つの変換が定義されるということは今までは位置の変換が定義されるということであった。ところが、一つの変換即わち一つのどんな方陣に対しても、1つのある方陣を対応させるような変換(どのような性質をもったなり)が存在する。例えば方陣によって上の32種の変換の中のどれかをとるような変換がそうだが、このような変換は本質的には上の位置的相似変換の組み合わせとみられる。ところがそれに対して要素 a に対して $17-a$ を対応させるような変換は明らかに相似変換である。ところがこれは位置的相似変換ではない。下の例を見れば明らか(位置的変換が上記32種に属さない)

1	2	16	15
13	14	4	3
12	7	9	6
8	11	5	10

→

16	15	1	2
4	3	13	14
5	10	8	11
9	6	12	7



この種の変換は位置がどう変化しているかではなく、同じ地点で数字がどう変化しているかを問題としている。即わち二つの変換は本質的に異っている。
又以上のような考え方は位置と数の変換が混ざっているようなものにも適応される。

○ 相似変換の定義

すべての方陣に函数 σ を施にても直それが方陣の性質を保つ時 σ を相似変換という。

従がって方陣を A とする時 σA は各要素の値とその位置の函数が合わさったものである。

～素数に関しての技巧的な証明～

1. $\pi(n) > 0.1 \cdot \dfrac{n}{\log n}$ （対数の底 10）

［証明］

$${}_{2n}C_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$ を二つの見地から比較する

（＊ 2項係数から ${}_{2n}C_n > 2^{2n}$，ここでは ${}_{2n}C_n > 2^n$ が 2の証明に必要
$\because (1+1)^{2n} = 1 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_n + \cdots + {}_{2n}C_1 + 1 = 2^{2n}$）

$${}_{2n}C_n = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n(n-1)\cdots 1} = \frac{2n}{n}\cdot\frac{(2n-1)}{n-1}\cdot\frac{(2n-2)}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{1}$$

$> 2^n \quad \therefore \quad {}_{2n}C_n > 2^n$

次に 数 $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ の素因数を調べる 明かにこの素因数は $2n$ よりも小さい
$2n$ 以下の素因数を小さいものから順に $P_1, P_2, \cdots, P_r$ とする。（$r = \pi(2n)$）
任意の素数 P_i が $n!$ に含まれる回数は

$$\left[\frac{n}{P_i}\right] + \left[\frac{n}{P_i^2}\right] + \left[\frac{n}{P_i^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{P_i^{8i}}\right]$$

である。 $8i$ は $P_i^{8i} \leqq n$ を満たす最大の自然数
又 $(2n)!$ に含まれる回数は同様に

$$\left[\frac{2n}{P_i}\right] + \cdots + \left[\frac{2n}{P_i^{s_i}}\right]$$

s_i は $P_i^{8i} \leqq 2n$ を満たす最大の自然数
よって ${}_{2n}C_n$ に含まれる素因数 P_i の個数は

$$\left[\frac{2n}{P_i}\right] + \cdots + \left[\frac{2n}{P_i^{s_i}}\right] - 2\left(\left[\frac{n}{P_i}\right] + \left[\frac{n}{P_i^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{P_i^{8i}}\right]\right)$$

$s_i \geqq 8i$ は自明又 $8i$ をこえる P_i の累乗に対して $\left[\dfrac{n}{P_i^k}\right]$ は明かに0である

よってこれを式に形式的につけたして

$$P_i({}_{2n}C_n) = \left(\left[\frac{2n}{P_i}\right] - 2\left[\frac{n}{P_i}\right]\right) + \left(\left[\frac{2n}{P_i^2}\right] - 2\left[\frac{n}{P_i^2}\right]\right) + \cdots + \left(\left[\frac{2n}{P_i^{8i}}\right] - 2\left[\frac{n}{P_i^{8i}}\right]\right)$$

を得る．ところが任意の実数 α に対して

$$[\alpha] \leqq \alpha < [\alpha]+1 \qquad [\alpha] \leqq \alpha < [\alpha]+1$$

$$\left[\frac{\alpha}{2}\right] \leqq \frac{\alpha}{2} < \left[\frac{\alpha}{2}\right]+1 \quad \therefore \quad -2\left[\frac{\alpha}{2}\right]-2 < -\alpha \leqq -2\left[\frac{\alpha}{2}\right]$$

より

$$[\alpha]-2\left[\frac{\alpha}{2}\right]-2 < 0 < [\alpha]-2\left[\frac{\alpha}{2}\right]+1$$

即ち

$$-1 < [\alpha]-2\left[\frac{\alpha}{2}\right] < 2$$

よって

$$\left[\frac{2n}{p_i^k}\right]-2\left[\frac{n}{p_i^k}\right] = 0 \text{ 又は } 1$$

より

$$p_i({}_{2n}C_n) \leqq g_i$$

$2n$ 以下のすべての p_i に対してこの等式は成り立つから 又 $p_i < 2n$ から

$${}_{2n}C_n \leqq p_1^{g_1} \cdots\cdots p_r^{g_r} < (2n)^r = (2n)^{\pi(2n)}$$

$$\therefore \quad 2^n < {}_{2n}C_n < (2n)^{\pi(2n)}$$

各々の対数をとり（底は常用対数とする <1より大きさどれでもよい>）

$$n \log 2 < \log({}_{2n}C_n) < \pi(2n)\log(2n)$$

左右だけをとりだして

$$n \log 2 < \pi(2n)\log(2n)$$

$$\therefore \quad \pi(2n) > \frac{\log 2}{2}\,\frac{2n}{\log(2n)} = \frac{0.3010}{2}\,\frac{2n}{\log(2n)}$$

$$> 0.1 \cdot \frac{2n}{\log(2n)}$$

これで n が偶数の時の証明は終わった n が奇数の時は

$$** \quad \frac{2n}{2n+1} \geqq \frac{2}{3} \qquad (n \text{ は自然数})$$

は明白

$$\pi(2n+1) > \pi(2n) > \frac{\log 2}{2}\,\frac{2n}{\log(2n)} > \frac{\log 2}{2}\,\frac{2n}{\log(2n+1)}$$

即わち $\pi(2n+1) > \dfrac{\log 2}{2} \dfrac{2n}{\log(2n+1)}$

両辺に** を乗じて

$$\frac{2n}{2n+1}\pi(2n+1) > \frac{2}{3}\frac{\log 2}{2}\frac{2n}{\log(2n+1)}$$

整理して

$$\pi(2n+1) > \frac{\log 2}{3}\frac{2n+1}{\log(2n+1)} = 0.1003\cdots \times \frac{2n+1}{\log(2n+1)}$$

$$> 0.1 \cdot \frac{2n+1}{\log(2n+1)}$$

よって奇数の時も定理は証明された。

2. $\pi(n) < 5\dfrac{n}{\log n}$

[証明]

* より $\quad {}_{2n}C_n < 2^{2n}$

${}_{2n}C_n = \dfrac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n!}$ は明らかに n より大きく $2n$ より小さい素数

を素因数にもつ。(分子にはその数が入っているが分母には入っていない。)
それらを $P_{s+1}, P_{s+2}, \cdots, P_r$ $\quad (r = \pi(2n),\ s = \pi(n))$
とすれば ${}_{2n}C_n$ はこれらすべての積を因数にもつから

$${}_{2n}C_n \geqq P_{s+1} \cdots P_r > n \quad n$$

各々は n より大きいから (乗数は $\pi(2n) - \pi(n)$ より)

$${}_{2n}C_n > n \cdots n > n^{\pi(2n)-\pi(n)}$$

上と合わせて

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} < {}_{2n}C_n < 2^{2n}$$

左右だれをとって対数をとると (底は10)

$$\{\pi(2n) - \pi(n)\}\log n < 2n\log 2$$

$$\therefore \pi(2n) - \pi(n) < 2\log 2\ \frac{n}{\log n}$$

今 xを任意の正の実数とする（整数でなくてもよい）

すると

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \leqq \pi\left(2\left[\frac{x}{2}\right]\right) - \pi\left(\left[\frac{x}{2}\right]\right) + 1$$

即わち

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \leqq 2\log 2 \cdot \frac{\left[\frac{x}{2}\right]}{\log\left[\frac{x}{2}\right]} + 1$$

$$\frac{\left[\frac{x}{2}\right]}{\log\left[\frac{x}{2}\right]} > 1 \quad \left(\left[\frac{x}{2}\right] > 1 \text{ で}\right)$$

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \leqq 2\log 2\, \frac{2\left[\frac{x}{2}\right]}{\log 2\left[\frac{x}{2}\right]} \quad \left(\left[\frac{x}{2}\right] \geqq 3 \text{ の時. } \left[\frac{x}{2}\right] = 2 \text{ の時も成立}\right)$$

$$\frac{2\left[\frac{x}{2}\right]}{\log 2\left[\frac{x}{2}\right]} < \frac{2x}{\log 2x}$$ $\left(\left[\frac{x}{2}\right] \geqq 2\right.$ の時、$\left[\frac{x}{2}\right] = 1$ の時も調べてみ

ると上の不等式

$$2\log 2 \cdot \frac{2\left[\frac{x}{2}\right]}{\log 2\left[\frac{x}{2}\right]} + 1 < (2\log 2 + 1)\frac{x}{\log \frac{x}{2}}$$

が成り立つ．よって．任意の正数 x に対して $\left(\left[\frac{x}{2}\right] > 1\right)$

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) < (2\log 2 + 1)\frac{x}{\log x}$$

これから

$$\pi(n)\log n - \pi\left(\frac{n}{2}\right)\log\frac{n}{2}$$

$$= \log n\left(\pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right)\right) + \pi\left(\frac{n}{2}\right)\left(\log n - \log\frac{n}{2}\right)$$

$$< (2\log 2 + 1)\frac{n}{\log n}\log n + \frac{n}{2}\log 2$$

$$< (5\log 2 + 3)\frac{n}{2}$$

同様なことを続けると

$$\pi(n)\log n - \pi\left(\frac{n}{2}\right)\log\frac{n}{2} < (5\log 2+3)\frac{n}{2}$$

$$\pi\left(\frac{n}{2}\right)\log\frac{n}{2} - \pi\left(\frac{n}{4}\right)\log\frac{n}{4} < (5\log 2+3)\frac{n}{4}$$

$$\pi\left(\frac{n}{4}\right)\log\frac{n}{4} - \pi\left(\frac{n}{8}\right)\log\frac{n}{8} < (5\log 2+3)\frac{n}{8}$$

. . . .

$$\pi\left(\frac{n}{2^{\alpha-1}}\right)\log\left(\frac{n}{2^{\alpha-1}}\right) - \pi\left(\frac{n}{2^{\alpha}}\right)\log\left(\frac{n}{2^{\alpha}}\right) < (5\log 2+3)\frac{n}{2^{\alpha}}$$

ここで α は　$2^{\alpha} < n$ を満たす最大の整数とする。(この最後の式は証明されてるいが実際に $\left[\frac{n}{2^{\alpha}}\right]=1$ として代入すれば容易にわかる。

辺々加えて

$$\pi(n)\log n - \pi\left(\frac{n}{2^{\alpha}}\right)\log\left(\frac{n}{2^{\alpha}}\right) < (5\log 2+3)\frac{n}{2}\ \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$< (5\log 2+3)\,n = (5\times 0.3010\cdots+3)\,n < 5n$$

ところが $\pi\left(\frac{n}{2^{\alpha}}\right)=0$ 　$\left(\because\ \frac{n}{2^{\alpha}} < 2\right)$

$$\therefore\quad \pi(n)\log n < 5n$$

$$\pi(n) < 5\,\frac{n}{\log n}$$

0　1と合わせて

$$0.1\,\frac{n}{\log n} < \pi(n) < 5\,\frac{n}{\log n}$$

又これより

$$\frac{\pi(n)}{n} < \frac{5}{\log n}$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n} \to 0$$ がわかる

～ 最大偏位 ～

○$T_n = \cos(n \cos^{-1} x)$ に関して

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

左辺 $= \cos^n x + i\, {}_nC_1 \cos^{n-1} x \sin x + \cdots + i^n \sin^n x$

$\cos x = u$ とおくと

$\therefore\ \cos(n \cos^{-1} u) = u^n - {}_nC_2 (1-u^2) u^{n-2} + {}_nC_4 (1-u^2)^2 u^{n-4} + \cdots$

$\cos(n \cos^{-1} x)$ は n 次の多項式で x^n の係数は

$1 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_k \qquad (k = n \text{ or } k = n-1)$

$= 2^{n-1}$

$(\because\ {}_nC_{2i} = {}_{n-1}C_{2i-1} + {}_{n-1}C_{2i})$

である。　$\cos(n \cos^{-1} x) = 0$ が成り立つのは

$$n \cos^{-1} x = m\pi + \frac{\pi}{2}$$

の時 即ち $\quad \cos^{-1} x = \dfrac{(2m+1)\pi}{2n}$

$$x = \cos \frac{(2m+1)}{2n} \pi$$

ところが　$m = sn + r$ とすれば

$$\frac{2sn + 2r + 1}{2n} \pi = s\pi + \frac{2r+1}{2n} \pi$$

$$\cos\left(s\pi + \frac{2r+1}{2n} \pi\right) = \cos \frac{2r+1}{2n} \pi$$

故に m は $r = 0, \cdots, n-1$ によってきまる。

$$x = \cos \frac{2r+1}{2n} \pi \qquad (r = 0, 1, \cdots, n-1)$$

$\cos(n\cos^{-1}x)$ の最大偏位は 1 をこえない。（最大値 +1 最小値 −1）

+1 になる地点

$$n\cos^{-1}x = m\pi \quad \therefore \quad x = \cos\frac{m\pi}{n} \quad (m=0,1,\cdots,n-1)$$

▷ 函数 $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x)$ は n 次の多項式で最高次の係数は 2^{n-1} である
$T_n(x)=0$ の根は $x = \cos\left(\frac{2r+1}{2n}\pi\right)$, $(r=0,1,\cdots,n-1)$ で与えられ $T_n(x)$ の極値は $x=\cos\frac{m\pi}{n}$ $(m=0,1,\cdots,n-1)$ でとり $x=0$ の時 函数値は 1 をとる $m=1,2,\cdots,n-1$ に従がって順に −1, +1 の極値を有す。

▷ 函数 $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ の最大偏位は 2^{n-1} より小さくなら ない。（但し x は 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で論ずるものとする）

［証明］ $P_n(x)$ を最大偏位が 2^{n-1} 未満 即ち $-\frac{1}{2^{n-1}} < P_n(x) < \frac{1}{2^{n-1}}$ が 区間 $[-1, 1]$ で成り立つ函数とする。

函数 $Q_n(x) = P_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ は $n-1$ 次の函数である。

$x=0$ に於て $\quad Q_n(x) = P_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}} < 0$

$x=\cos\frac{\pi}{n}$ に於て $\quad Q_n(x) = P_n(x) + \frac{1}{2^{n-1}} > 0$

$\cdots\cdots \quad < 0$

$\quad > 0$

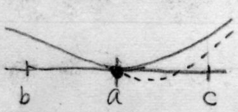
このような論法を続けると $Q_n(x)$ は区間 $\left(0, \cos\frac{\pi}{n}\right)$, $\left(\cos\frac{\pi}{n}, \cos\frac{2\pi}{n}\right)$ $\cdots$ $\left(\cos\frac{n-1}{n}\pi, \cos\pi\right)$ のそれぞれで少なくても 1 根根を有す

区間の数は n 個あるから $Q_n(x)$ は明らかに n 根以上の根を有す
$Q_n(x)$ は $n-1$ 次の函数であるからこのようなことはありえない。
（ $Q_n(x) \equiv 0$ の時 P_n はこの証明の限りではないがこの時 $P_n \equiv T_n$ となるからこの時でも与定理は成り立つ ）

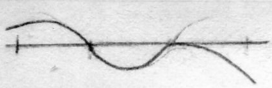
▷ 最大偏位に $\frac{1}{2^{n-1}}$ を有する n 次の x^n の係数が1の多項式は $\cos(n\cos^{-1}x)$ のみである。

[証明] P_n を T_n の他の上の条件を有す多項式とする。
前と同様にて推論すると Q_n は n 個の区間 $[0, \cos\frac{\pi}{n}]$ $[\cos\frac{\pi}{n}, \cos\frac{2\pi}{n}]$ … $[\cos\frac{n-1}{n}\pi, \cos\pi]$ のそれぞれに根を有す。Q_n は多くとも $n-1$ 根しか根を有さないから その区間のうち 2区間に1根しか存在しない区間又は 3区間に2根 4区間に3根, … n 区間に $n-1$ 根 のような区間が存在する。

i) 2区間に1根をもつような区間があったとする。すると根はその両区間の境界にあるはずである。次にその地点をはさむ2つの地点ではその函数値の符号は同じである。このことから考えてその地点で Q_n は明らかに重根である。即ち本質的には2根存在する。



ii) 3区間に2根 の場合も i と同様に本質的に3根存在することが



同様なことが他のすべての場合にいえる

° 数体K上の $x_1, x_2, \cdots, x_m$ の対称式 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ は K上の基本対称式の式 $\psi(s_1, s_2, \cdots, s_m)$ で表わされる。

° 方程式 $f(x)=0$ の作る係数が代数的に独立な時 係数体 $K(a_1, \cdots, a_m)$ に属す一数 c は有理数体の有理式 $\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ で一意的に表わされる。又よって数 α が K に属するそれは Q上の $x_1, x_2, \cdots, x_m$ の対称式として一意的に表わされる。

[証明] c が $a_1, \cdots, a_m$ の Q上の有理式として表わされるのは明白(∵ Kはそのように定義されている) もし $c = P(a_1, \cdots, a_m)$ $c = R(a_1, \cdots, a_m)$, $P \neq R$ と表わされたとすれば

$P - R = 0$ ∴ $(P - R \neq 0)$ 即ち $a_1, \cdots, a_m$ が代数的独立であることに反す。後者は $a_1, a_2, \cdots, a_m$ を $x_1, \cdots, x_m$ の基本対称式でおきかえ $x_1, \cdots, x_m$ が代数的に独立であることを使う。

12月19日現在

現代代数学　　冬休み　現代代数学 & スミルノフ
行列
スミルノフ
函数論
方陣

$\circ \quad (D^2 + a^2) \sin ax \cdot \varphi(x)$

$$D^2 \sin ax \cdot \varphi(x) = \varphi(x) D^2 \sin ax + 2\, D \sin ax \times D\varphi(x) + \sin ax\, D^2 \varphi(x)$$

$(D^2 + a^2)\, \varphi(x)$

$(D + ia)(D - ia)\, \varphi(x)$

$= (D + 2ia)\, D\, e^{ia} \varphi(x)$

$(D^2 + a^2)\, \varphi(x) = p\, D^2 y$

$D^2 \varphi + a^2 \varphi = p\, D^2 y$

$(D + ia)\varphi = \dfrac{p}{D - ia} D^2 y$

$f = \dfrac{1}{D - ia} p D^2 y$

$Df - iaf = pD^2 y$

$(D^2 + a^2)\varphi = u D^2 w$

$D^2 \varphi + a^2 \varphi = u D^2 w$

$D^2 \varphi - u D^2 w + a^2 \varphi = 0$

$D^2 \varphi + a^2 \varphi = y$

$D^2 uv + a^2 uv = s D^2 w$

$u''v + 2u'v' + v''u + a^2 uv$

$= s D^2 w$

$v u''$

$2u'v' + v''u + a^2 uv = 0$

$v''u + 2u'v' + a^2 uv = 0$

$v'' + \dfrac{2u'v'}{u} + a^2 v = 0$

$(D + \alpha)\, e^{-\alpha} \varphi$

$e^{-\alpha} \varphi' + -\alpha e^{-\alpha} \varphi + \alpha e^{-\alpha} \varphi$

$f(D + \alpha)\, e^{-\alpha} \varphi = e^{-\alpha} f(D)\, \varphi$

$(D^2+a^2)\,u\varphi = u\,D^2\varphi$

$u''\varphi + 2u'\varphi' + \varphi'' u + a^2 u\varphi = u\varphi''$

$u''\varphi + 2u'\varphi' + a^2 u\varphi = 0$

$u'' + 2u'\dfrac{\varphi'}{\varphi} + a^2 u = 0$

$(D^2+a^2)\,y = 0$

$y = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax$

$(D^2+a^2)\,y = \varphi$

$y = u_1 \sin ax + u_2 \cos ax$

$y = \dfrac{\frac{1}{2ai}}{D-ia}\varphi - \dfrac{\frac{1}{2ai}}{D+ia}\varphi$

$u_1 = \dfrac{1}{D-ia}\varphi$ $\qquad ce^{iat} - c'e^{-iat}$

$\boxed{Du_1 - iau_1 = \varphi}$

$Du_1 - iau_1 = 0$

$\dfrac{du_1}{dt} = iau_1$

$\dfrac{du_1}{iau_1} = dt$

$\dfrac{1}{ia}\log u_1 = t + c$

$u_1 = ce^{iat}$

ve^{iat}

$(e^{-iat}\int \varphi e^{iat}\,dt) + c'e^{-iat}$

$(e^{iat}\int \varphi e^{-iat}\,dt) + ce^{iat}$

$v'e^{iat} + iave^{iat} - \cancel{iave^{iat}} = \varphi$

$v'e^{iat} = \varphi$

$e^{iat}\int \dfrac{\varphi}{e^{iat}}\,dt + ce^{iat}$

〜 差分方程式について〜

▷ 定数係数の方程式

。 作用素法

作用素 Δ を $\Delta f(x) = f(x+1)$ で定義する。

この時 $\Delta^m f(x) = f(x+m)$

$$\Delta^n \{\Delta^m f(x)\} = \Delta^{n+m} f(x) = f(x+n+m)$$

1. $P(\Delta)\{Q(\Delta) f(x)\} = \{P(\Delta) Q(\Delta)\} f(x)$

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \Delta^k \left\{\sum_{j=0}^{n} b_j \Delta^j f(x)\right\} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k \Delta^k b_j \Delta^j f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j \Delta^{k+j} f(x)$$

$$= \left\{\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j \Delta^{k+j}\right\} f(x)$$

$$= \{P(\Delta) Q(\Delta)\} f(x)$$

2. $P(\Delta)\{f(x)+g(x)\} = P(\Delta) f(x) + P(\Delta) g(x)$

3. $P(\Delta) f(x) = g(x)$ の時 $\dfrac{1}{P(\Delta)} g(x) = f(x)$ と定義する。

この時 $P(\Delta)\left\{\dfrac{1}{P(\Delta)} g(x)\right\} = P(\Delta) f(x) = g(x)$

。 方程式

$$a_0 f(x+n) + a_1 f(x+n-1) + \cdots + a_{n-1} f(x+1) + a_n = 0$$

の解法 （ $a_0, \cdots, a_n$ は実数）

方程式を　$f(x)=y$ とおき演算子 Δ で置きかえる

$$\{a_0\Delta^n + a_1\Delta^{n-1} + \cdots + a_m\} y = 0 \quad , \quad a_0 \neq 0 \qquad (1)$$

この左辺の Δ の多項式を複素数の範囲で因数分解をする。

$$a_0 (\Delta-\alpha_1)^{r_1}(\Delta-\alpha_2)^{r_2}\cdots(\Delta-\alpha_m)^{r_m} y = 0 \qquad (1)$$

。　$(\Delta-a)^k y = 0$ の解法

$$(\Delta-a)^k y = (\Delta-a)\{(\Delta-a)^{k-1}y\} = 0$$

ここで　$(\Delta-a)^{k-1}y = z$ とおけば

$$(\Delta-a)z = 0$$

$(\Delta-a)z=0$ の解は $z = ca^{x-1}$ である。

▷　$(\Delta-a)y = \varphi(x)$ の解は

$$y = ca^{x-1} + \sum_{h=0}^{x-2} a^k f(x-k-1)$$

次に $(\Delta-a)^{k-2}y = z_2$ とおくとその時は

$$(\Delta-a)z_2 = z$$

$$z_2 = c_2a^{x-1} + \sum_{h=0}^{x-2} a^k c_1 a^{x-k-2}$$

$$= c_2a^{x-1} + \sum_{h=0}^{x-2} c_1 a^{x-2}$$

$$= c_2a^{x-1} + (x-1)c_1a^{x-2}$$

$$= (c_1'x + c_2')a^{x-1}$$

更に $(\Delta-a)z_3 = z_2$ を解いて

$$z_3 = c_3a^{x-1} + \sum_{h=0}^{x-2} a^k (c_1(x-k-1)+c_2)a^{x-k-2}$$

$$z_3 = c_1'a^{x-1} + c_2'xa^{x-1} + c_3'x^2a^{x-1}$$

よって一般に

$$(\Delta-a)^k y=0$$

の解が

$$y= C(x)\,a^{x-1} \qquad (\ C(x)\text{の次数は } k-1 \text{ 次の任意函数})$$

なる形と想像がつく。
これは k 個の任意定数を含むから一般解と予想される。

$$(\Delta-a)^k \{C(x)\,a^{x-1}\} = (\Delta-a)^{k-1}\left[(\Delta-a)\{C(x)\,a^{x-1}\}\right]$$

$$\begin{aligned}(\Delta-a)\{C(x)\,a^{x-1}\} &= C(x+1)\,a^{x} - C(x)\,a^{x}\\ &= C_1(x)\,a^{x}\end{aligned}$$

$C_1(x)$ は $k-2$ 次
C_i は $(\Delta-a)$ をうけるたびに1次へるから結局 k 回 $(\Delta-a)$ をくり返せば 0 となる。従って

$$(\Delta-a)^k \{C(x)\,a^{x-1}\}=0$$

よって $\qquad y= C(x)\,a^{x-1}\ ,\quad \deg C(x)= k-1$

○ $\quad P(\Delta)\{Q(\Delta)y\} = \{P(\Delta)Q(\Delta)\}y = Q(\Delta)\{P(\Delta)y\} \qquad (2)$

▷ 従って $\quad y= C_m(x)\,\alpha_m^{x-1}$ は (1) の解となる

(2)より 任意の $y= C_i(x)\,\alpha_i^{r_i-1}\ (i=1,2,\cdots,m)$

は(1)の解となる。ところが y_1, y_2 が (1)の解なら
y_1+y_2 も又 (1) の解であるから

(1)の一般解は

$$(y)= C_1(x)\,\alpha_1^{x-1}+\cdots+C_m(x)\,\alpha_m^{x-1} \qquad (3)$$

となる $\qquad$ 但し $\quad \deg C_i(x)= r_i-1 \quad (i=1,\cdots,m)$

(3) がるぜ一般解かとりうと任意定数を

$\sum_{i=1}^{m} r_i$ 個即ち (1)の次数 n 個含む。

これを単に

$$y = c_1(x)\alpha_1^{x-1} + \cdots + c_m(x)\alpha_m^{x-1}$$

と書くが α_i が複素数の時は下のものが便利

Δの方程式は $a+bi$ を含めば $a-bi$ をも含む

$\alpha = a+bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと

$$C(x)\alpha^{x-1} = C(x)\, r^{x-1}\{\cos(x-1)\theta + i\sin(x-1)\theta\}$$

$$C'(x)\bar{\alpha}^{x-1} = C'(x)\, r^{x-1}\{\cos(x-1)\theta - i\sin(x-1)\theta\}$$

$\deg C(x) = \deg C'(x)$ だから両方を加えると

$$C_1(x)\, r^{x-1}\cos(x-1)\theta + i\,C_2(x)\, r^{x-1}\sin(x-1)\theta$$

i を $C_2(x)$ の中に含めて

$$C_1(x)\, r^{x-1}\cos(x-1)\theta + C_2(x)\, r^{x-1}\sin(x-1)\theta$$

即ち Δの方程式が虚根を有す時は共役な2つの根の羃乗を上記の式でおきかえるとよい。

注) 上の公式中 $\alpha_i = 1$ に対しては $C_i(x)\alpha_i^{x-1}$ を単に $C_i(x)$ とおく但し

$$\deg C_i(x) = r_i$$

従がって $(\Delta-\alpha_i)^{r_i} y = 0$ の解を y_i とすれば

$$y = \sum_{h=1}^{m} y_h .$$

方程式

$(a_0\Delta^n + a_1\Delta^{n-1} + \qquad + a_n)\, y = \varphi(x)$

の解法

$(\Delta - 1)\, y = \varphi(x)$

の解 $\quad y = c + \sum_{k=1}^{x-1} \varphi(k)$

を $\quad y = \int \varphi(x)\,\Delta x + c$ で記す

1. $(\Delta - a)\, y = \varphi(x)$ の解

$$y = c a^{x-1} + a^{x-1} \sum_{k=1}^{x-1} \varphi(k) a^{-k}$$

$$= c a^{x-1} + a^{x-1} \int \varphi(x) a^{-x} \Delta x$$

$$= a^{x-1} \left\{ \int \varphi(x) a^{-x} \Delta x + c \right\}$$

2. $(\Delta - a)^n y = \varphi(x)$ の解

∘ $(\Delta - a)^2 y = \varphi(x)$ の時

$$y = a^{x-1} \left[\int a^{x-1} \left\{ \int \varphi(x) a^{-x} \Delta x + c_1 \right\} \Delta x + c_2 \right]$$

$$= a^{x-1} \left[c_1 \int a^{x-1} \Delta x + \int a^{x-1} \left(\int \varphi(x) a^{-x} \Delta x \right) \Delta x + c_2 \right]$$

$$= \frac{a^{x-1}}{a-1} \left[c_1' a^{x-1} + a^{x-1} \int \varphi(x) a^{-x} \Delta x - \int \varphi(x) \Delta x + c_2' \right]$$

▷ $(\Delta-a)^r y=\varphi(x)$ に於て $y=a^x y'$ とおくすると

$$(\Delta-a)^r y=(\Delta-a)^{r-1}(\Delta-a)\,a^x y'=(\Delta-a)^{r-1}\,a^{x+1}\delta y'$$
$$=(\Delta-a)^{r-2}\,a^{x+2}\delta^2 y'$$
$$=\cdots$$
$$=a^{x+r}\,\delta^r y',\qquad \delta=\Delta-1$$

$(\Delta-a)^r y=\varphi(x)$ であるから

$$\frac{1}{\delta^r}\varphi(x)\,a^{-x-r}=y'$$

$$\therefore\quad y=a^x\frac{1}{\delta^r}\{\varphi(x)\,a^{-x-r}\}$$

$\frac{1}{\delta}=\int$ であるから（定数項を無視）

$$y_0=a^{x-r}\int^r \varphi(x)\,a^{-x}\,\Delta x^r$$

3 $(\Delta^m+a_1\Delta^{m-1}+\cdots+a_m)y=\varphi(x)$ の特殊解

$$(\Delta-\alpha_1)^{r_1}(\Delta-\alpha_2)^{r_2}\cdots(\Delta-\alpha_m)^{r_m}\,y=\varphi(x)$$

とする。 $f(\Delta)=(\Delta-\alpha_1)^{r_1}\cdots(\Delta-\alpha_m)^{r_m}$ とし

$\frac{1}{f(\Delta)}$ を部分分数に分解する。

この時 個々の式は

$$\frac{A}{(\Delta-\alpha)^r}\varphi(x)$$

の形でこれは 2 の形である。

$$a^x \frac{1}{\delta^r}\left\{ \varphi(x)\, a^{-x-r} \right\} = \frac{1}{(r-1)!}\int_1^{x-1} (u)_{r-1}\, \varphi(x-u-r+1)\, a^{u+1}\, \Delta u$$

が成り立つ　但し　$(u)_{r-1} = u(u-1)\cdots(u-r+2)$

これは $\frac{1}{\delta^r}\left\{ \varphi(x)\, a^{-x-r} \right\}$ の特殊解 $\varphi(x)\cdots(\varphi(1)=0,\ \varphi'(1)=0$

$\varphi''(1)=0, \cdots\cdots, \varphi^{(r-1)}(1)=0)$ を与える。

共役根を $\alpha = a+bi$, $\bar{\alpha} = a-bi$ とし　$a+bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする。
この時

$$\left\{ \frac{1}{(\Delta-\alpha)^r} + \frac{1}{(\Delta-\bar{\alpha})^r} \right\} \varphi(x)$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_1^{x-1} (u)_{r-1}\, \varphi(x-u-r+1) \left\{ \bar{\alpha}^{u+1} + \alpha^{u+1} \right\} \Delta u$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_1^{x-1} (u)_{r-1}\, \varphi(x-u-r+1) \left\{ 2\rho^{u+1} \cos(u+1)\theta \right\} \Delta u$$

$$= \frac{2\rho}{(r-1)!}\int_1^{x-1} (u)_{r-1}\, \varphi(x-u-r+1) \left\{ \rho^{u} \cos(u+1)\theta \right\} \Delta u$$

$$a^x C_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} \frac{a^{x-n}}{(n-1)!} \int (x+2)\cdots(x-n+4)\, \frac{f}{a^{x-n}}$$

主函数"和分"

$$\int_1^x \Delta x = x$$

$$\int_1^x x \Delta x = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$\int_1^x x(x+1)(x+2)\cdots(x+r)\,\Delta x = \frac{1}{r+2}\,x(x+1)\cdots(x+r+1)$$

$$\int_1^x x(x-1)\cdots\cdots(x-r)\,\Delta x = \frac{1}{r+2}\,x(x-1)\cdots(x-r-1)$$

$$\int_1^x a^x \Delta x = \frac{a(a^x-1)}{a-1}$$

$$\int_1^x$$

1967年計画

代数学 2, 3, 4, 5, 6
方程式 3, 4, 5
函数論 1, 2.

方程式
3. 整方程式補足, 微分方程式
4. 微分方程式
5. 種々函数方程式

函数論 1, 2 未定

本年度目標 1月6日
1. 現代代数学征服 (1, 2, 3)
2. トポロジー征服
3. スミルノフ高数教 2〜6まで
4. 行列と行列式征服
5. 微分方程式征服
6. 整数論征服.

。基礎構座
1 代数学
2 行列と行列式
14 整数論

。新しい数学へのアプローチ
6 トポロジー

。スミルノフ 高等数学教程
2 I巻第2分冊
6 III巻第2部第1分冊

。微分積分学演習
。数と計算
。微積分とその応用
。微分方程式
。対数表
。数学の思想
。数学マジック
。数のユーモア

正領域．負領域

$f(x,y)>0$，　$f(x,y)=0$，　$f(x,y)<0$

の領域を定める。函数 $f(x,y)$ は連続で，更に連続な偏導函数 f_x，f_y をもつとする。今　$f(x,y)=0$　の曲線が容易に描かれたと仮定する。

平均値の定理によって　（ x_0, y_0 を $f(x_0,y_0)=0$ なる点とする）

$$f(x_0, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\Delta y\, f_y(x_0, y_0+\theta\Delta y)\quad , \quad (0\leqq\theta\leqq 1)$$

f_y の連続性から Δy を充分小さくとれば

$$|f_y(x_0, y_0+\theta\Delta y)-f_y(x_0,y_0)|=|h|<\varepsilon$$

がどんな ε についても成り立つ　但し　$h=f_y(x_0,y_0+\theta\Delta y)-f_y(x_0,y_0)$

h で式をおきかえ

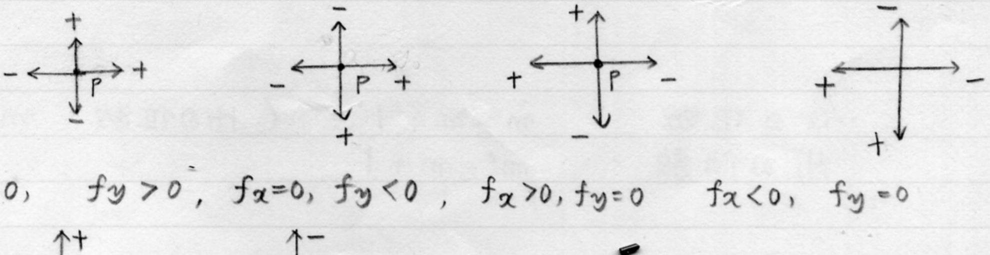
$$f(x_0, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\Delta y\left\{f_y(x_0,y_0)+h\right\}$$

ここで　h は　$\Delta y<\delta$ に対して　$h<\varepsilon$　になるとしてよい。ε として $|f_y(x_0,y_0)|$ を与えると　$f(x_0,y_0)$ は 0 だから

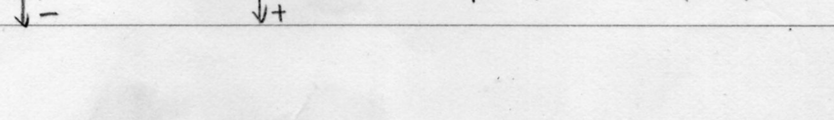
$$f(x_0, y_0+\Delta y)=\Delta y\left\{f_y(x_0,y_0)+h\right\}$$

よりこの式の符号は充分小さな Δy に対して（ $h<\varepsilon$ になるような Δy に対して）$\Delta y\, f_y(x_0,y_0)$ の符号と一致する。これから点（x_0,y_0）付近の $f(x,y)$ の符号が判断できる。上と同様にして式の符号が　$\Delta x\ f_x(x_0,y_0)$ に等しいことが　$f(x_0+\Delta x, y_0)$ の方から得られる。点(x_0,y_0) を P とかく

$f_x>0$，$f_y>0$　　$f_x>0$，$f_y<0$　　$f_x<0$，$f_y>0$　　$f_x<0$，$f_y<0$



$f_x=0$，　$f_y>0$，$f_x=0$，$f_y<0$，$f_x>0$，$f_y=0$　　$f_x<0$，　$f_y=0$



同様にして点Pから方向θの近傍の点の符号は

$$\cos\theta\ f_x(x_0, y_0) + \sin\theta\ f_y(x_0, y_0)$$

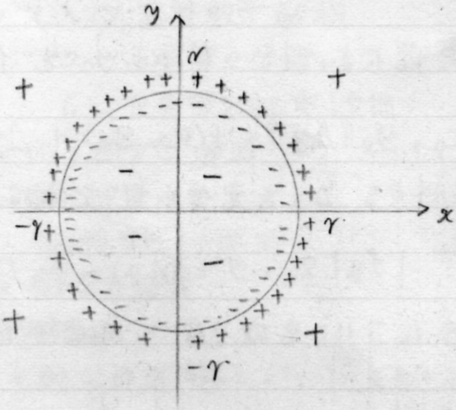
の符号と一致する

例・円　$x^2+y^2-r^2=0$を正負0の領域に区別

$f_x = 2x$,　$f_y = 2y$

f_xの正負はxに同じ
f_yの正負はyに同じ

$x^2+y^2-r^2=0$の近傍でしか
$f(x, y)$は符号をかえないから
円の外が＋　内が－　周で
0となる。



公理

A
1. 集合 G　部分集合　$H_1, H_2, \cdots$
2. G, H は空でない。
3. 部分集合H_i ($i=1, \cdots$) には各m個のGの元が属す
4. 異なる部分集合　H_i, H_a に対して　$H_i \cap H_a = a\ (\in G)$
5. 異なる任意の元a, bの属する部分集合は必ず存在して1つに確定する。

Gのすべての元を$H_1, H_2, \cdots$はつくす。

B
1
2
3
4 異なる部分集合　H_i, H_a について　$H_i \cap H_a = F_{ia}$ なるk個の要素をもつGの部分集合が確定する。

5

A.　Gの位数 ……　m^2-m+1　(H_iの位数 … m)
H_iの個数 ……　m^2-m+1

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

$m=2 \qquad |G|=3$

	H_1	H_2	H_3
1	○		○
2	○	○	
3		○	○

$m=3 \qquad |G|=7$

G \ H	1	2	3	4	5	6	7
1	○	○	○				
2	○			○	○		
3	○					○	○
4		○		○		○	
5		○			○		○
6			○	○			○
7			○		○	○	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	○	○	○	○									
2	○				○	○	○						
3	○							○	○	○			
4	○										○	○	○
5		○			○			○			○		
6		○				○			○			○	
7		○					○			○			○
8			○		○					○		○	
9			○			○		○					○
10			○				○		○		○		
11				○	○				○				○
12				○		○				○	○		
13				○			○	○				○	

公理

1. 集合 G　部分集合 $H_1, \cdots$,
2. $G, H_1, \cdots$ は空でない。
3. Gの任意のxについて少なくとも $x \in H_i$ なるH_iが1つ存在
4. H_i ($i=1,2, \cdots$) は m 個のGの元から成る。
5. 任意の H_i, H_j に対して $F = H_i \cap H_j$ なるFはGの元の一定個数n個からなる。
6. Gの任意のK個の元 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ を含む部分集合はただ1つ確定する。
7. $H_i \subset G$ ($i=1,2, \cdots$)　(但し $n<k \leqq m$)

Q.
1. 同
2. 同
3. 同
4. 同
5. $m=1$
6. $k=2$
7. 同

集合Gの要素の個数: l

$$l = m^2-m+1$$

部分集合 H_iの数: P

$$P = m^2-m+1$$

[証明]　部分集合 $H_1 = \{a_1, \cdots, a_m\}$ が存在する。H_1以外に部分集合が存在しない時 $H_1 = G$ になるから 7より H_1以外に部分集合 H_2 が存在する。H_1, H_2 は1致しないから Gには H_2に属する a_{m+1} なる元が存在する。GからH_1に属する要素をすべてぬきとった集合を $\bar{H}_1$ で表わす H_1以外の部分集合は H_1の中の1要素と $\bar{H}_1$の中の $m-1$ 要素からなる。$m=2$ ならば $H_1=\{a_1, a_2\}$ で他の部分集合がこれJのどJるかと $\bar{H}_1$のの1要素から成ることから H_1以外の部分集合は $(l-2)\times 2$ 個だけある。ところが Gの部分集合は明らかに $l(l-1)/2$ 個である。よって

$$l(l-1)/2 = 1+(l-2)\cdot 2\ ,\ l^2-l = 2+4l-8\ ,\ l^2-5l+6=0$$

を解いて $l = 2, 3$, $l \geqq 3$ だから $l=3$ これは上の式に適する。
部分集合の数 $P = 1+(l-2)\cdot 2 = 3$ (適する) $m \geqq 3$ ならば $\bar{H}_1$の2要素の組合わせは1つの部分集合を決定し1つの部分集合の決定のしかたは $(m-1)(m-2) \div 2$ 個重複するから結局 H_1以外の部分集合の数は

$$\frac{(l-m)(l-m-1)}{(m-1)(m-2)}$$

である。又前と同様にGの部分集合の総数は

$$\frac{l(l-1)}{m(m-1)}$$ だから

$$\frac{(l-m)(l-m-1)}{(m-1)(m-2)} + 1 = \frac{l(l-1)}{m(m-1)}$$

$$\therefore \quad \frac{(l-m)(l-m-1)}{m-2} = \frac{(l-m)(l+m-1)}{m}$$

$$\therefore \quad \frac{l-m-1}{m-2} = \frac{l+m-1}{m}$$

$$m(l-m-1) = (m-2)(l+m-1)$$

$$ml - m^2 - m = ml + m^2 - 3m - 2l + 2$$

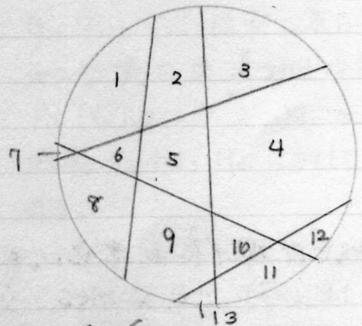
$$2m^2 - 2m + 2 - 2l = 0$$

$$l = m^2 - m + 1$$

$$P = \frac{(m^2-m+1)(m^2-m)}{m(m-1)} = m^2 - m + 1$$

$$\therefore \quad P = l = m^2 - m + 1$$

“直線によってできる円の区分について。”

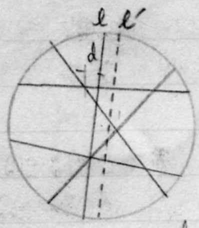


左図の様に円を直線によって区分した時どれだけの部分に分けられるかを調べる。
まず次のことは明らか。

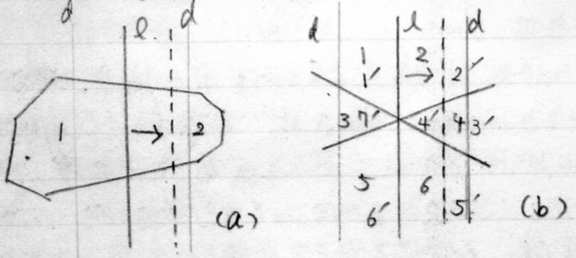
I　円のある区分が与えられた時それを相似拡大しても部分の数には変化はない。

○　n本の直線によって円を区分する時の部分の最大数を求める。

①　部分の数が最大となる区分Δに於ては3直線が円内で交わることはない。



互いに1点で交わる3直線があったとする。この時その中の1本をlとする。この直線lとの距離がもっとも小さいこの直線上にない2つの直線の交点が少なくとも1つ存在するその距離をdとする。lをdより小さいキョリだけ動かすと

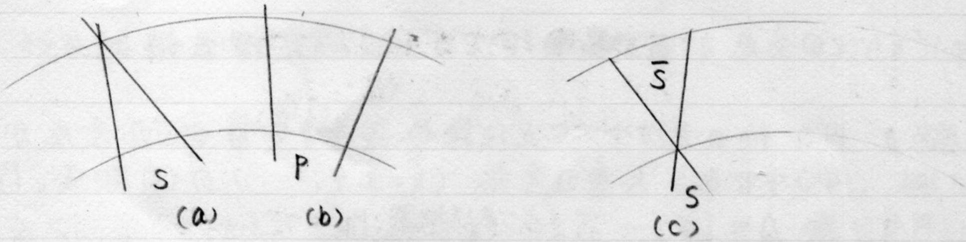


(a),(b)なる図よりわかるように　(a)のようなところでは変化はなく(b)のようなところでは1つ部分がふえる。(3本以上がl上で交わる場合はみなふえる)　よってこのことからlをdより小さいキョリ移動させて作った区分Δ'がΔより大きい区分をもつことになり従って①は成り立つ。

②　上述Δの直線は円内ですべて交わる。

まず平行な直線があれば①の証明のように少し移動させて平行でないようにしておく。次に円のワクをはずし直線をすべて円外まで延長する。この時直線は平行のものはないから有限距離でみな交わるそのうち1番遠いものを含む大きな円で又ワクをつくる。こうしてできた区分Δ''はΔより大きい部分をもつ。

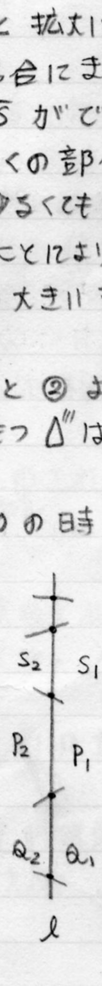
まず 最初の円に一番近い円外の交点上を通る同心円を描く. この円とはじめの円 R との間には交点は1つもない。



よって R と拡大した円 R′ の境目近くの部分の多角形の増減は上記(a),(b)(c)の場合にまとめられる。(a),(b)では数に変化はないが c では明らかに新しい部分 $\bar{S}$ ができているから。R の円の上にのっている交点の数だけ後の区分 Δ''_1 の方が多くの部分を含むことになる $\Delta \leqq \Delta''_1$ ところが R′ は少し拡大しただけで部分の数が少なくても少しふえる。よって1個でも円外に2直線の交点があれば、R を拡大することにより部分の数をふやすことができこれを相似縮小すれば最初の区分Δより大きい部分の数をもつ新しい区分 Δ''_2 を得る よって②が成り立つ。

③ ①と②より区分Δの直線は円内ですべて2本ずつ交わる。逆にこのような性質をもつ Δ''' は必ず Δ と同じ部分の数 $1+\frac{n(n+1)}{2}$ をもつ。(n… 直線の本数)

まず n=0 の時は部分の数 m は1である。n=s−1 の時定理が成り立っているとする。この時 性質①,②をもつ区分 Δ'''(s本の直線をもつ)からある直線(任意)l を1本ぬくとその後でも s−1 本について①,②が成り立つ。ところでこの l は他の s−1 本の直線と1点ずつで交わっている。左図. l をぬくと今まで分かれていた S_1S_2, P_1P_2, Q_1, Q_2 が1つの部分 S. P. Q となることがわかる 即ち l 上にのっている交点の間1つにつき1個ずつ部分の数がへる。交点の数は s−1 個であるからその間の数は s 個である。従って Δ''' から l をぬいた Δ'''_1 の部分の数は $\Delta'''_1 = \Delta''' - s$ で求められる。Δ'''_1 について③が成り立つから



$$\Delta''' = 1+\frac{s(s-1)}{2} + s = 1+\frac{s(s+1)}{2}$$

となって③が成り立つ。

○ n本の直線によって区分される円の部分の最大数は $\frac{n^2+n+2}{2}$ である。

更に円の内部にすべての交点がある場合は次の1般的定理を得る。

○ n本の直線が円の1つの区分をつくり任意の幾本かの直線の交点が円内にある時 円の中にある k重の交点 $(k=3,4,\cdots)$ の個数を P_k とすれば 区分の数 $\Delta = [n] - \sum_k \frac{(k-2)(k-1)}{2} P_k$
$[n] = \frac{n^2+n+2}{2}$ を表わすとする。

k重の交点は1直線を少しずらすことにより $k-1$ 重の交点となり部分の数は $k-2$ 個増える。3重の交点は1直線のずらしによって1部分ふえるから1般に 1つの k重の交点を2重の交点に分解すると部分の数は $\frac{(k-2)(k-1)}{2}$ となるこれを操り返せば最後にはすべて2重の交点になり前の定理から容易に本定理を得る。

この定理から円を区分する円内で互いに交わるn本の直線による部分の数は k重の交点の数を P_k として

$$\Delta = \frac{n^2+n+2}{2} - \sum_k \frac{(k-2)(k-1)}{2} P_k \quad (k=3,4,\cdots)$$

次に円内に必ずしも交点をもたないような場合を考える。

○ あらかじめ円内で交わらない直線を少し動かして3本以上の直線が1点で交わらないようにしておく。
円Rを拡大すれば当然前の考察より内外にある交点の数だけ部分の数がふえる。この拡大された円では先の公式が成り立つから。拡大された円の部分の数は

$$\frac{n^2+n+2}{2} - \sum_k \frac{(k-2)(k-1)}{2} P_k,$$

但し P_k はもとの円内のものを数えれば十分である。
従って

$$\Delta = \frac{n^2+n+2}{2} - \sum_k \frac{(k-2)(k-1)}{2} P_k - \varepsilon$$

但し δ は R 外の交点の数

ところで δ は次の式によって求められる

$$\delta = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{2} \frac{k(k-1)}{2} P_k$$

故に $$\Delta = \frac{n^2+n+2}{2} - \sum_{3} \frac{(k-2)(k-1)}{2} P_k - \left(\frac{n^2-n}{2}\right) + \sum_{2} \frac{k(k-1)}{2} P_k$$

$$= n+1 + \sum_{2} (k-1) P_k$$

以上より次の定理を得る。

。 1 定円 R 内を n 本の直線で区分した時 k 重の交点の数を P_k とすれば R の部分の数 Δ は

$$\Delta = n+1 + \sum_{2} (k-1) P_k$$

で表わされる。 又これは R 内で交わらない 2 直線の組の数を δ として

$$\Delta = \frac{n^2+n+2}{2} - \sum_{3} \frac{(k-2)(k-1)}{2} P_k - \delta$$

とも表わされる。(この結果は平面全体や凸図形の区分すべてに成り立つ。)

$$G(XYZ)\,G(X) \leqq G(XY)\,G(XZ)$$

$$\left\{\begin{array}{l} G(XYZU)\,G(X) \leqq G(XYZ)\,G(XU) \\ \qquad '' \qquad\quad \leqq G(XYU)\,G(XZ) \\ \qquad '' \qquad\quad \leqq G(XZU)\,G(XY) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} G(XYZU)\,G(XY) \leqq G(XYZ)\,G(XYU) \\ G(XYZU)\,G(XZ) \leqq G(XYZ)\,G(XZU) \\ G(XYZU)\,G(XU) \leqq G(XZU)\,G(XYU) \end{array}\right.$$

$$G(XYZU)^6\,G(X)^3 \leqq G(XYZ)^3\,G(XYU)^3\,G(XZU)^3$$

$$G(XYZU)^2\,G(X) \leqq G(XYZ)\,G(XYU)\,G(XZU)$$

$$G(x_1, \cdots, x_m) \leqq G(x_i)\,\boxed{G(X_i)}$$

$$G(x_1, \cdots, x_m)^2\,G(x_i) \geqq \Pi\, G(x_i x_j)\,G(x_i X_{ij})$$

$$G(x_1, \cdots, x_m)\,G(x_i, x_j$$

$$G(x_1, \cdots, x_m)^{m-2}\,G(x_1) \geqq$$

$\vee$ … 和　　$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

$\wedge$ … 積　　$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

$F_1(\bar{Q}, \bar{P}, i_1, i_2, i_3) = \bar{i_1}$

$F_2(\bar{Q}, \bar{P}, i_1, i_2, i_3) = \bar{i_2}$

$F_3(\bar{Q}, \bar{P}, i_1, i_2, i_3) = \bar{i_3}$

$$\begin{cases} F_1 = (\bar{Q} + \bar{P})\, f_1 & (1) \\ F_1 = \bar{P}\, f_1 & (2) \\ F_1 = \bar{Q}\, f_1 & (3) \end{cases}$$

(2) の時は　$\bar{P} = 0$ の時 $\bar{i_1} = 0$ となるから $P = 1$ なら必ず $i = 1$

故に $P \models i_1$

$$Q = c_1(i_1, i_2, i_3)\bar{P} + c_2(i_1, i_2, i_3) + s\bar{P}$$

$$\bar{Q} = (\bar{c_1}(i_1, i_2, i_3) + P)(\bar{c_2}(i_1, i_2, i_3))(P + 1)$$

$$Q = (\bar{P} + i_1 + i_2 + i_3)(\bar{P} + i_1 + i_2)(\bar{P} + i_1 + i_3)$$

NO. 28　行列　1.　完
NO. 29　行列　2.　未
NO. 30　集合　　未

未完成ノート　（NO. 20 以上）

NO. 23	数学雑記帳		後
NO. 24	函数論		序
NO. 26	方程式	3	序
NO. 27	代数学	2	中
NO. 29	行列	2	白
NO. 30	集合		序

トポロジー
射影幾何
積分
代数学 3
集合 2
○群論
○線型代数

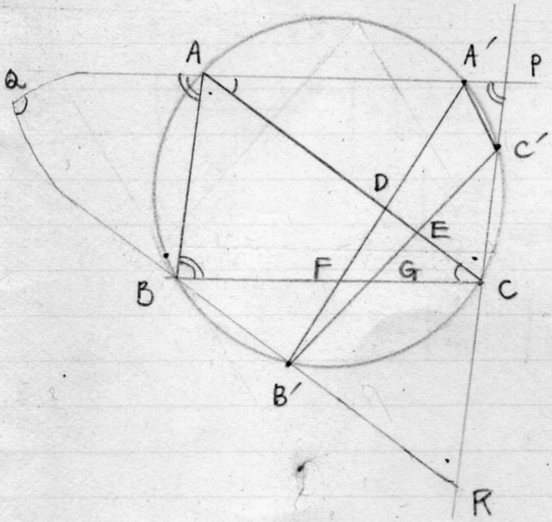
〜数学セミナー 61〜 エレガントな解答を求む

- 鋭角三角形 ABCの頂点Aを通ってBCに平行な直線をひき△ABCの外接円との交点のAでない方をA'.（交点がA以外なければAとする）とする。点B，Cについても同様にしてB'，C'をきめる。この時

$$\triangle ABC \geqq \triangle A'B'C'$$

が成り立つ。

[証明]　下図のようにしてP，Q，Rをきめると P，Q，Rは円外の点である。(∵ △ABCは鋭角三角形)



故にAA'，BB'，CC'が円内で交わることがなくAとA'の間に他の点が入ることはない。(他BとB'，CとC'も同様)
次に $\overset{\frown}{AC} \geqq \overset{\frown}{BC} \geqq \overset{\frown}{AB}$ としておく。
もし $\overset{\frown}{AC} > \overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{AB}$ なら
A' C' は共に $\overset{\frown}{AC}$ 上に B' は $\overset{\frown}{BC}$ 上にある。左図の様に△PQRを考えれば△ABCによって区切られる4つの三角形は互いに合同であるから

$\angle B'A'C' = 180° - \angle C'A'P - \angle AA'B'$

$\begin{cases} \angle C'A'P = \angle A & (\square AA'C'C) \\ \angle AA'B' = \angle A & (\square AA'B'B) \end{cases}$

同様に $\angle A'B'C' = 180° - \angle C'B'R - \angle A'B'Q = 180° - 2\angle B$
$(\bowtie BCC'B',\ \square AA'B'B)$

$\angle B'C'A' = 180° - \angle B'C'C - \angle A'C'P = 180° - 2\angle C$
$(\square A'C'CA,\ \bowtie C'CBB')$

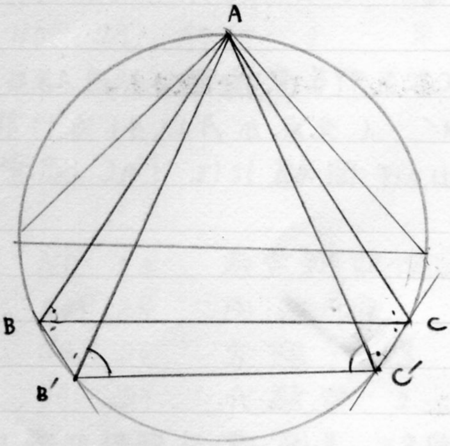
$\triangle ABC = \frac{1}{2}\{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C\}$

$\triangle A'B'C' = \frac{1}{2}\{-\sin 4A - \sin 4B - \sin 4C\}$

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin A \sin B \sin C$

$-(\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C) = 2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$

$\dfrac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC} = 8 \cos A \cos B \cos C \leqq 1$ (テーラーの定理をつかえ)



$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$ の時

$\angle AC'B' = 180^\circ - 2\angle B$

$\angle AB'C' = 180^\circ - 2\angle B$

$\angle B'AC' = 6\angle B + \angle A - 360^\circ \quad (\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC})$

$\angle B'AC' = \angle A + 360^\circ - 6\angle B \quad (\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{BC})$

$\triangle ABC = \sin A \sin^2 B$

$\triangle A'B'C' = \sin(6B + A - 360)\sin^2 2B$

$= \sin(360^\circ - 6B + A)\sin^2 2B$

～ε・δ 練習 ―

$\dfrac{nx_1+(n-1)x_2+\cdots+x_n}{n^2}$ は $x_n\to a$ ならば a に収束する。

$x_i = a + y_i \qquad (i=1,\cdots,\cdots)$

とする。

$\because\ x_i\to a$ 即ち $y_i = x_i - a\to 0$

y_i を使って式を書き直すと

$$\frac{n+1}{2n}a+\frac{ny_1+(n-1)y_2+\cdots+y_n}{n^2}$$

任意の正数 ε をとり $n>n_0$ に対して $|y_n|<\varepsilon$ となるように n_0 をとる。こうすると

$$\left|\frac{ny_1+\cdots+y_n}{n^2}\right|=\left|\frac{ny_1+\cdots+(n-n_0+1)y_{n_0}}{n^2}+\frac{(n-n_0)y_{n_0+1}+\cdots+y_n}{n^2}\right|$$

$$\leqq\left|\frac{ny_1+\cdots+(n-n_0+1)y_{n_0}}{n^2}\right|+\left|\frac{(n-n_0)y_{n_0+1}+\cdots+y_n}{n^2}\right|$$

$$\leqq\left|\frac{y_1}{n}\right|+\left|\frac{n-1}{n^2}y_2\right|+\cdots+\left|\frac{n-n_0+1}{n^2}y_{n_0}\right|$$

$$+\left|\frac{n-n_0+(n-n_0-1)+\cdots+1}{n^2}\varepsilon\right|$$

$$\leqq\left|\frac{y_1}{n}\right|+\left|\frac{y_2}{n}\right|+\cdots+\left|\frac{y_{n_0}}{n}\right|+\left|\frac{(n-n_0)(n-n_0+1)}{2n^2}\varepsilon\right|$$

$$\leqq\left|\frac{y_1}{n}\right|+\left|\frac{y_2}{n}\right|+\cdots+\left|\frac{y_{n_0}}{n}\right|+\frac{1}{2}\varepsilon$$

ここで 適当な n_0 を $\mathrm{Max}\left|\dfrac{y_i}{n}\right|\leqq\dfrac{\varepsilon}{2\varepsilon_0}\ (i=1,\cdots,n_0)\ (n>n_0)$ 定となるように定め n_0 と n_0 の大きい方を n_1 とする この時 $n>n_1$ ならば

$$\left|\frac{ny_1+\cdots+y_n}{n^2}\right|\leqq\underbrace{\frac{\varepsilon}{2n_0}+\frac{\varepsilon}{2n_0}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2n_0}}_{n_0\text{個}}+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

故に $\dfrac{n+1}{2n}a\to\dfrac{1}{2}a$ より 定理が成り立つ。

$n \to \infty$ の時 $\frac{10}{n} \to 0$

即ち 0と1の間の任意の数 ε に対して $n > n_0$ なる n_0 が存在して

$\frac{10}{n} < \varepsilon$

$$\frac{10}{1} \cdot \frac{10}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{10}{m} = \frac{10}{1} \cdot \cdots \cdot \frac{10}{n_0} \cdot \cdots\cdots + \frac{10}{m}$$

$$\leqq \frac{10}{1} \cdot \cdots \cdot \frac{10}{n_0} \cdot \varepsilon^{m-n_0}$$

$$\leqq A\, \varepsilon^{m-n_0}$$

$m > m_0$ に対して. $\varepsilon^{m-n_0} < \frac{\varepsilon}{A}$ 即ち $\varepsilon^{m-n_0-1} < \frac{1}{A}$

となる。mをとり n_0とm_0の大きい方を n_1とする この時 $m > n_1$ ならば

$\frac{10^m}{m!} \leqq \varepsilon$ となる。

数学セミナー　61.4.　エレガントな解答を求むより

01. 非負の要素よりなる n 次の正方行列 $A=(a_{ij})$ ，（$a_{ij} \geqq 0$； $i, j=1, \cdots, n$）がすべての i, j に対して $a_{ij}+a_{ji}>0$ という性質を有しているとする．この時 $B=A^2$ にはすべての要素が正（$\neq 0$）であるような行が存在することを証明せよ．更に A のどの行にも少なくとも1個の0がある時には $B=A^2$ には上のような行が少なくとも3本存在することを示せ。

［証明］：前半の証明：

今 B のすべての行に 0なる要素が存在したとし

$$\begin{cases} b_{1s_1}=a_{11}a_{1s_1}+\cdots+a_{1m}a_{ms_1}=0 \\ b_{2s_2}=a_{21}a_{1s_2}+\cdots+a_{2m}a_{ms_2}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{ms_m}=a_{m1}a_{1s_m}+\cdots+a_{mm}a_{ms_m}=0 \end{cases} \qquad (1)$$

とする。 $a_{pq} \geqq 0$ だから (1) より もし $a_{pq} \neq 0$ ならば $a_{qs_p}=0$ でないといけない。

$$a_{pq} \neq 0 \text{ ならば } a_{qs_p}=0 \qquad (2)$$

仮定より $a_{rs}=0$ ならば $a_{sr} \neq 0$ でないといけない。
特に $a_{rr} \neq 0$ である。（$\because 2a_{rr}>0$）
以上と (2) から

$$a_{pq}=0 \text{ ならば } a_{qp} \neq 0$$

$$a_{qp} \neq 0 \text{ ならば } a_{ps_q}=0 \quad (\text{特に } a_{pp} \neq 0 \text{ より } a_{ps_p}=0) \qquad (3)$$

よって

$$a_{pq}=0 \text{ ならば } a_{ps_q}=0 \qquad (4)$$

写像 $\varphi: i \to s_i$ を考える。φ の定義域は 1〜n 全体である。
よって列

$$1 \to \varphi(1),\ \varphi^2(1),\ \varphi^3(1),\ \cdots\cdots$$

をつくれば ある $\lambda_1 < \lambda_2$ に対して

$$\varphi^{\lambda_1}(1)=\varphi^{\lambda_2}(1)$$

となる　これより $\varphi^{\lambda_2-\lambda_1}\{\varphi^{\lambda_1}(1)\}=\varphi^{\lambda_1}(1)$ となる。
$\varphi^{\lambda_1}(1)=b$ とせば　$\varphi^{\lambda}(b)=b$.　$(\lambda \geqq 1)$

(3) より　$a_{b\varphi(b)}=0$

(4) を連続に使うと

$$a_{b\varphi(b)}=a_{b\varphi^2(b)}=\cdots=a_{b\varphi^\lambda(b)}=0$$

$\varphi^\lambda(b)=b$ だから結局　$a_{bb}=0$　となり不合理である。
よって　B の少なくても1つの行が 0 を全く含まない。(前半証明終)

：後半の証明：
今度は B は 2行以下の行を除きすべて 0 なる要素を含むと仮定する。
その2行を e_1, e_2 とする.(1行の時は $e_1=e_2$ として以下の証明は同じ)
前と同様に e_1, e_2 を除く $1\sim n$ までの数に写像 φ を定義する。
この時　明らかに

$$a_{pq}\neq 0 \quad (p\neq e_1, e_2) \text{ ならば } a_{qs_p}=0 \qquad (5)$$

が成り立つから

$$a_{pq}=0 \quad (q\neq e_1, e_2) \text{ ならば } a_{ps_q}=0 \qquad (6)$$

も成り立つ。A の e_1 行, e_2 行 はともに 0 の要素を1つは含むから、
$a_{e_1u}=0$,　$a_{e_2v}=0$　としておく。　列

$$u,\ \varphi(u),\ \varphi^2(u),\ \cdots\cdots,\ \varphi^\sigma(u)$$
$$v,\ \varphi(v),\ \varphi^2(v),\ \cdots\cdots,\ \varphi^\tau(v)$$

をつくる。但しこの列は その途中で e_1, e_2 がでてくれば 写像ができ
ないので φ^σ, φ^τ でうちきられている。(e_1, e_2, がいつまで立ってもで
てこないなら 前の証明と同様にに矛盾を生じる)
さて　　$\varphi^\sigma(u)$, $\varphi^\tau(v)$　は それぞれ e_1 , e_2 のどちら
かである。

$$\varphi^\sigma(u)=e_1$$

とすると. $a_{e_1u}=0$ と (6) から直ちに $a_{e_1e_1}=0$ となり矛盾を生じる.
同様にて　$\varphi^\tau(v)=e_2$ からも矛盾を生じ 結局

$$\varphi^\sigma(u)=e_2 \qquad \varphi^\tau(v)=e_1$$

となる。(もし $e_1=e_2$ なら この時にすでに矛盾を生じるから $e_1\neq e_2$ となる)

$$a e_1 u = 0, \quad a e_2 v = 0$$

から (6) とこれを使って

$$a e_1 e_2 = 0, \quad a e_2 e_1 = 0$$

となる。これは $e_1 \neq e_2$ だから明らかに不合理である。

Bは少なくても 0なる要素をもたない行を 1行はもつから

従って、Bは 0なる要素をもたない行が3行はある。

（後半証明終）

セミナー，　67. 5　1. より

◦ $_nC_1$, $_nC_2$, ⋯ , $_nC_{n-1}$ がすべて偶数である自然数 n をすべて求めよ。
一般に、素数 p が、$_nC_1$, ⋯, $_nC_{n-1}$ をすべて割り切る自然数 n はどんなものか。

(解答)　1般の場合を証明する

$$_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$s!$ に含まれる p の指数は

$$\left[\frac{s}{p}\right]+\left[\frac{s}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{s}{p^e}\right]+\cdots\cdots$$

である。

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

に含まれる p の指数 u は

$$u=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{s}{p^2}\right]+\cdots\cdots-\left[\frac{r}{p}\right]-\left[\frac{r}{p^2}\right]-\cdots\cdots-\left[\frac{n-r}{p}\right]-\cdots\cdots$$

である。$1\leqq r\leqq n-1$ の時　$u\geqq 1$ なる n を求めればよい。

$$u=\left\{\left[\frac{n}{p}\right]-\left(\left[\frac{r}{p}\right]+\left[\frac{n-r}{p}\right]\right)\right\}+\left\{\left[\frac{n}{p^2}\right]-\left(\left[\frac{r}{p^2}\right]+\left[\frac{n-r}{p^2}\right]\right)\right\}+\cdots\cdots$$

$$\left[\frac{n}{p^e}\right]\geqq\left[\frac{n-r}{p^e}\right]+\left[\frac{r}{p^e}\right] \qquad (1)$$

であるから　$u\geqq 0$
今ある r に対して $u=0$ 即ち　$_nC_r$ が p の倍数でなくなったとする。
この時上の (1) より　すべての $e=1,\cdots$, に対して

$$\left[\frac{n}{p^e}\right]=\left[\frac{n-r}{p^e}\right]+\left[\frac{r}{p^e}\right] \qquad (2)$$

が成り立たなければならない。

$$n=c_ep^e+d_e$$
$$r=a_ep^e+b_e$$

とすれば (2) は

$$\left[\frac{d_e-b_e}{p^e}\right]=0 \qquad (3)$$

$0 \leqq d_e \leqq p^e-1$, $0 \leqq b_e \leqq p^e-1$

だから この条件は

$$d_e \geqq b_e \qquad (4) \qquad e=1,\cdots$$

と同値である。 逆にすべての e に対し (4) が成り立てば $u=0$ となる。

r, n を p 進法で書いて

$$n = \alpha_s \cdots\cdots \alpha_0$$
$$r = \beta_s \cdots\cdots \beta_0$$

とすれば それは

$$\alpha_j \geqq \beta_j \qquad (j=1,\cdots, s)$$

と同値である。 最初の仮定 $r \neq 0, n$ より

すべての α_j が 0 又 すべての j に対して $\alpha_j = \beta_j$

であってはならない。 (5)

以上より n が 最初の条件を満たすなら (5) を満たす r が存在してはならない。

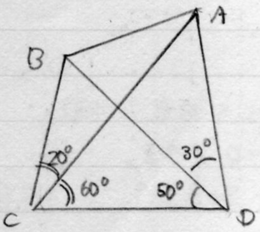
このような r が存在しない n の p 進法における一般形は

$$n = 1000 \cdots 0$$

で これを 10 進法に直せば $n = p^k$ $(k=0,1,\cdots)$

が n の 形である。

～数学セミナー 6 ～　　5/21



（問）　$\angle BAD$ は $70°$ である。

（証明）　$\angle BAC$ が $30°$ であることがいえればよい

$$\overline{AC} = \frac{\sin 80° \cdot \overline{CD}}{\sin 40°} = 2\cos 40° \cdot \overline{CD}$$

$$\overline{BC} = \frac{\sin 50° \cdot \overline{CD}}{\sin 50°} = \overline{CD}$$

$$\sin \angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \sin(160° - \angle BAC) = \frac{\sin(20° + \angle BAC)}{2\cos 40°} \qquad (1)$$

$\angle BAC = x$ とする　すると　(1) は

$$2\cos 40° \cdot \sin x = \sin(20° + x) \qquad (2)$$

となる。

$$\sin(20° + x) = \sin 20° \cos x + \sin x \cos 20° \qquad (3)$$

だから　(2) に (3) を代入して $\sin x$ で両辺を割ると　（$x \neq 0$ は明白）

$$2\cos 40° = \sin 20° \cdot \cot x + \cos 20° \qquad (4)$$

$$\therefore \cot x = \frac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°}$$

$$\begin{aligned} 2\cos 40° - \cos 20° &= \cos 40° - \cos 20° + \cos 40° = -2\sin 30° \sin 10° + \cos 40° \\ &= \cos 40° - \sin 10° = \sin 50° - \sin 10° \\ &= 2\sin 20° \cos 30° \\ &= \sqrt{3}\sin 20° \end{aligned}$$

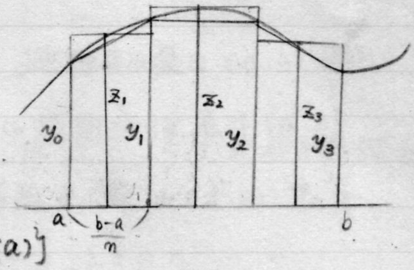
$$\therefore \cot x = \sqrt{3}$$

明らかに　$0 < x < 90$　なる故　$x = 30°$

以上より　$\angle BAD = 70°$　である。

○ 数値積分公式

§1 台形則



$$T_n = \frac{b-a}{2n}\left\{ y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n \right\}$$

$$E_n \sim \frac{(b-a)^2}{12n^2}\left\{ f'(b) - f'(a) \right\}$$

§2 中点則

$$M_n = \frac{b-a}{n}\left\{ z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} + z_n \right\}$$

$$E_n \sim -\frac{(b-a)^2}{24n^2}\left\{ f'(b) - f'(a) \right\}$$

§3 シンプソン則

$$S_n = \frac{T_n + 2M_n}{3} = \frac{b-a}{6n}\left\{ y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \cdots + y_{2n-2}) + y_{2n} \right\}$$

$$S_n - I \sim \frac{1}{180}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^4 \left\{ f'''(b) - f'''(a) \right\}$$

§4 4次ニュートンコーツの公式

$$Q_n = \frac{16S_{2n} - S_n}{15} = \frac{b-a}{90n}\left\{ 7y_0 + 32(y_1 + y_5 + \cdots + y_{4n-3}) + 12(y_2 + \cdots + y_{4n-2}) \right.$$
$$\left. + 32(y_2 + \cdots + y_{4n-2}) + 14(y_4 + \cdots + y_{4n-4}) + 7y_{4n} \right\}$$

$$Q_n - I \sim \frac{2}{945}\left(\frac{b-a}{4n}\right)^6 \left\{ f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a) \right\}$$

~ 最小有理数 ~　（no. memo）

○ 区間 (a, b) の最小有理数　（以後 a, b は正の実数か又は 0　$p, q, p', q' \cdots$ は自然数とする）

(a, b) に属する有理数の中で分母，分子が最小となる有理数

$\frac{q}{p}$ が (a, b) の最小有理数なら (a, b) に属する任意の有理数 $\frac{q'}{p'}$ に対して

$$p \leqq p', \quad q \leqq q'$$

が成り立つ。

（以上より最小有理数は存在しても区間につきただ1つに限る）

I　空でない区間 (a, b) に対して最小有理数は必ず存在する。

（証明）　まず (a, b) に属する分母の最小の有理数を $\frac{q_1}{p}, \frac{q_2}{p}, \cdots\cdots$ とする。

そのうち分子の最小のもの即ち最小の有理数を $\frac{q}{p}$ とする。

この $\frac{q}{p}$ が区間 (a, b) における最小有理数となる。なぜなら もし有理数 $\frac{q'}{p'}$ が (a, b) に含まれ $q' \leqq q$ であるとすれば p の仮定より

$$p \leqq p' \quad \therefore \quad \frac{q'}{p} \geqq \frac{q'}{p'} \qquad (1)$$

$q' \leqq q$ より

$$\frac{q}{p} \geqq \frac{q'}{p} \qquad (2)$$

(1)，(2) より

$$a < \frac{q'}{p'} \leqq \frac{q'}{p} \leqq \frac{q}{p} < b$$

となり $\frac{q'}{p} \in (a, b)$ である。p を分母にもつ (a, b) に属する有理数の分子は q 以上だから　$q' \geqq q$　$\therefore$ $q = q'$ となり q より小さい分子をもつ有理数が (a, b) に存在しないことがわかる。以上より $\frac{q}{p}$ は，分母，分子とも (a, b) に属するあらゆる有理数の分母，分子より小さい（か又は等しいか）である）

II　x が (a, b) の最小有理数であれば $x + n$ は $(a+n, b+n)$ の最小有理数である。（n は整数）

（証明）　$y = \frac{q'}{p'}$ を $(a+n, b+n)$ における最小有理数とし $x = \frac{q}{p}$ とすれば

$$y - n \in (a, b), \quad y - n = \frac{q' - np'}{p'} \quad \therefore \quad p \leqq p', \quad q' - np' \geqq q \qquad (1)$$

$$x + n \in (a+n, b+n), \quad x + n = \frac{q + np}{p} \quad \therefore \quad p \geqq p', \quad q + np \geqq q' \qquad (2)$$

(1), (2) より　$p = p'$,　$q + np = q'$

∴　$y = \dfrac{q+np}{p} = x + n$

Ⅲ　x が　(a, b) の最小有理数であるならば　$\dfrac{1}{x}$ は $\left(\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{a}\right)$ の最小有理数である。

(証明)　$\left(\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{a}\right)$ の最小有理数を $y = \dfrac{q'}{p'}$,　$x = \dfrac{q}{p}$ とすれば

$\dfrac{1}{x} \in \left(\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{a}\right)$ だから　　$q \geqq p'$,　$p \geqq q'$　　(1)

$\dfrac{1}{y} \in (a, b)$ だから　　$q' \geqq p$,　$p' \geqq q$　　(2)

(1), (2) より　$p = q'$,　$q = p'$

∴　$y = \dfrac{1}{x}$

Ⅳ　最小有理数の求め方

1.　(a, b) が整数を含めばその最小なものが最小有理数となる。

2.　(a, b) が整数を含まない時は a, b から $c = [a]$ を引いて区間 $(a-[a], b-[a])$ を作り次にこの逆数の区間 $\left(\dfrac{1}{b-[a]}, \dfrac{1}{a-[a]}\right) = (a_1, b_1)$ をつくる。後はこれについて 1, 2 を繰り返せばこの操作は有限回の後終わり求める数がわかる。

(証明)　(a, b) の最小有理数 $\dfrac{q}{p}$ は 1, 2, 1, 2 … と続けられることによりユークリッドの互除法を適用されていることになり有限回の後にはその区間の最小有理数は整数になる。即ち、1 の段階で終了する。

例　$\sqrt{3} = 1.73205\cdots$ に近い分数の中で $1.7320 < x < 1.7321$ を満たすできるだけ簡単な分数を求む。

$1\dfrac{112}{153}$

注　$\dfrac{q}{p}$, $\dfrac{q'}{p'}$ において　$p > p'$, $q > q'$

ならば

$$\frac{1}{\frac{q}{p}} + s = \frac{p+qs}{q}, \qquad \frac{1}{\frac{q'}{p'}} + s = \frac{p'+q's}{q'}$$

で　$p + qs > p' + q's$,　$q > q'$　即ち連分数の最後までこの関係が保存される。

例　$0.3201 < x < 0.3202$ の有理数を分母の小さいものから順に10あげよ。

$$
\begin{array}{lll}
3 & 3201 & 10000 \\
 & \underline{3176} & \underline{9603} \\
15 & 25 & 397 \quad 8 \\
 & & \underline{375} \\
 & & 22
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
3 & 3202 & 10000 \\
 & \underline{3152} & \underline{9606} \\
7.8 & 50 & 394 \quad 8 \\
 & & \underline{350} \\
 & & 44
\end{array}
$$

$8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ \frac{17}{2},\ \frac{19}{2}$

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8+\frac{1}{8}}} = \frac{65}{203},\quad \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8+\frac{1}{9}}} = \frac{73}{228},\quad \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8+\frac{1}{10}}} = \frac{81}{253}$$

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8+\frac{1}{11}}} = \frac{89}{278},\quad \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8+\frac{1}{12}}} = \frac{97}{303}$$

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8+\frac{1}{13}}} = \frac{105}{328},\quad \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8+\frac{1}{14}}} = \frac{113}{353},\quad \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8+\frac{1}{15}}} = \frac{121}{378}$$

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8+\frac{2}{17}}} = \frac{138}{431},\quad \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8+\frac{2}{19}}} = \frac{154}{481}$$

$$\frac{65}{203},\ \frac{73}{228},\ \frac{81}{253},\ \frac{89}{278},\ \frac{97}{303},\ \frac{105}{328},\ \frac{113}{353},\ \frac{121}{378},\ \frac{138}{431},\ \frac{154}{481}$$

一般に
$$\begin{cases} \dfrac{65+8k}{203+25k} & k=0,1,\cdots,7 \\[2ex] \dfrac{138+16j}{431+50j} & j=0,1. \end{cases}$$

〜数学セミナー 8〜　　7/21

（問）数字を任意に並べて $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ とする。どんな並べ方をしている場合でも $1 \leq i \leq j \leq 7$ なる i, j を適当に選んで i 番目から j 番目の部分

$d_i d_{i+1}, \cdots, d_j$ を　$j-i+1$ ケタの整数とみなしたものが 7で割り切れるようにできることを証明せよ。

（証明）背理法を使う。まずある $d_1d_2 \cdots d_7$ に対してどんなにうまく i, j を選んでもそれが7の倍数にならないとする。

$d_i d_{i+1} \cdots d_j$ は常に7で割り切れないから $d_i d_{i+1} \cdots d_j \overbrace{00 \cdots 0}^{n-j}$ も7で割り切れない。

次にこれらの数の中から特に

d_7, d_6d_7, $d_5d_6d_7$, $d_4d_5d_6d_7$, $d_3d_4d_5d_6d_7$

$d_2d_3d_4d_5d_6d_7$, $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$

の7数をとりだす。これらのうちの任意の2数の差は $d_i d_{i+1} \cdots d_j \overbrace{0 \cdots 0}^{n-j}$ の形で従ってどの2つも7に関して同じ剰余類に属さない。従ってこれら7つの数はそれぞれ異った剰余数 0, 1, 2, …, 6 の中のどれか1つに、しかも1つの剰余類には1個、上の数のうち必ずはいる。（部屋わり論法）従って7数のうち少なくとも1つは7の倍数となり、仮定に反する。

故に定理が成り立つ。　　QED

一般の場合も全く同様にして　2と5を素因数にもたないものについては証明できる。

$\overbrace{d_1 \cdots\cdots\cdots d_r}$　　$2 \nmid r$, $5 \nmid r$

なお2や5を因数にもつものについては、r はいくら大きくとっても定理は不成立。　1111……1　なる数でためせばわかる。