包括原理と自然数

矢田部俊介

2006 年 5 月 9 日（火）

1 The comprehension principle (包括原理)

- 任意の φ にたいし $\{x : \varphi(x)\}$ の形の集合の存在を保証する。
- 包括原理は非常に強力な集合の存在保証原理であり、古典論理の上では矛盾 (Russell Paradox) を導く。

Russell paradox: 集合 $R = \{x : x \notin x\}$ を定義する。まず $R \in R$ を仮定してみると

$$\dfrac{\dfrac{R \in R\,(\text{仮定})}{R \notin R}\,(R\text{ に代入}) \qquad R \in R\,(\text{仮定})}{\perp}$$

と矛盾が導かれる。$R \notin R$ を仮定しても同様。

Russell paradox を解決するため、いくつかの解決策が提案された。

(1) 古典論理は保持するが、**包括原理を制限する**。

例: **ZFC** (Zermelo-Frankel 集合論 + 選択公理)

(2) 包括原理を保持するが、**古典論理を制限する**。

(2) 包括原理を保持するが、古典論理を制限する。

先ほどの証明では $R \in R \,\&\, R \in R \to \bot$ を証明し $R \in R \to \bot$ を結論とした。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{R \in R\,(\text{仮定})}{R \notin R}\,(R\text{ の定義に代入}) \qquad R \in R\,(\text{仮定})}{\bot}}{R \in R \,\&\, R \in R \to \bot}
$$

- **縮約規則 (Contraction rule)**: 「同じ仮定は何度用いてもよい」

$$A \to A \,\&\, A$$

- **Grisĭn logic**: 古典論理から縮約規則のみを除去した体系
- Grisĭn logic では包括原理を仮定しても矛盾は起こらないことを示した [Gri82]。

1.1 Grisǐn Logic の意味

Girard: 縮約規則を持たない論理は **状態の変化** (state transition) を表現する。

- 古典論理で命題は「永遠不変の真実」を表す
- Grisǐn logic で命題は「**一時的な状態** (state)」を表現し、$\rightarrow$ は**状態から状態への変化** (transition) を表現する

例：リンゴの色が黄色から赤色に変化した: [**黄**] & ([**黄**]→[**赤**]) ⊢ [**赤**]

- Grisǐn logic では色の実際の変化は以下の推論で表現される (何の矛盾も導かない)。

$$\frac{[\textbf{黄}] \quad [\textbf{黄}] \to [\textbf{赤}]}{[\textbf{赤}]}$$

- しかし古典論理では縮約規則より矛盾が導出される。つまり

$$\frac{[\textbf{黄}] \qquad \dfrac{[\textbf{黄}] \quad [\textbf{黄}] \to [\textbf{赤}]}{[\textbf{赤}]}}{\bot}$$

つまり [**黄**] & [**黄**] & ([**黄**]→[**赤**]) は矛盾を導き、縮約規則より [**黄**] & ([**黄**]→[**赤**]) も矛盾を導くことになる。

1.1.1 Girard による縮約規則と無限性の関係

- 縮約規則は**一時的な前提を永遠に使用可能にする**規則、と見なすことができる。
- 以下の論理式を考える。

$$I:\ (\forall x)(\exists y)x < y$$

I は自然数が無限個あることを表す。例えば「相異なる自然数が少なくとも 27 個存在する」ことを証明するためには、I を 26 回使用して証明しなければならない。

“**infinity does not mean many, but always.**” [Gir87]

この意味で**縮約規則は無限性の源泉である**といえる。

1.2 GL 上の集合論

- Grisǐn logic 上で包括原理を持つ集合論を **GL** と呼ぶ。
- **GL** では、包括原理により自然数などを定義することができる。
  - 0 は $\emptyset = \{x : x \neq x\}$,
  - $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\{\emptyset\}\}$, etc.
- それだけでなく、以下に述べる帰納定理 (Recursion Theorem) により、自然数全体の集合 ω や、関数の再帰的定義などが可能である

Theorem 1.2.1 (帰納定理) 任意の formula $\varphi(x, \cdots, y)$ にたいして、GL 上で以下が証明可能

$$(\exists z)(\forall x)[x \in z \leftrightarrow \varphi(x, \cdots, z)]$$

- つまりこの定理により z 自身がパラメーターとして現れるような formula で定義される集合を定義できる。
- 特に特殊なターム θ を定義できる。これは以下を満たす。

$$(\forall x)x \in \theta \leftrightarrow \varphi(x, \cdots, \theta)$$

Definition 1.2.2 自然数の集合 ω は、以下を満たす term として導入される。

$$(\forall x)x \in \omega \leftrightarrow [x = \emptyset \vee (\exists y)[y \in \omega \wedge x = \{y\}]]$$

包括原理をもつ集合論上では以下が期待された。

(1) **古典数学**（算術と解析学）**のかなりの部分を展開できるのではないか**。

帰納定理により、自然数上のすべての部分帰納的関数を定義可能。

ここでは「自然数とは何か」という問題は、すべて論理法則と包括原理に還元され、

論理主義の夢が実現される。

(2) **古典数学と整合的になるのではないか**

矛盾を導き出せないほど証明力の弱い論理上、論理主義の道具で数学を展開

- 古典数学の定理で証明できないものはあるだろう
- しかし古典数学で A が証明されるのに、$\neg A$ が証明されることはないだろう

(3) **「有限的」な集合論となるのではないか**

仮定 (1)(2) が満たされるならば、**GL** における集合論で定義される集合は

– 有限集合（元をすべて書き下すことができる）

– ω のように**有限の記号列により**定義が書き下せる無限集合

であり、証明力の弱さから、対角線論法のような「予想もしなかった元」を新しく

構成することが不可能になるのはないか。

この場合、両者とも**「有限集合のように」**確定されたものとして扱うことができる。

上の期待 (2)(3) は、実は成就されない。

そのことを Grisĭn logic の extension である **ŁQ** 上で示す。

2　縮約規則と超準的自然数

2.1　多値論理の集合論

predicate logic	Grisǐn logic $\xrightarrow{\subset}$	$\mathbf{ŁQ}$ $\xrightarrow{\subset}$	古典論理
包括原理	○	○	×
縮約規則	○	断片	×

ただし **ŁQ** はŁukasiewicz 無限値述語論理を表す。

2.2 ŁQ と包括原理

- **ŁQ** は無限個の推論規則を使い形式化される [Hay63]

- **ŁQ** のモデルの定義

(1) 真理値は $[0,1]$ の実数値をとる。
(2) $\|\neg\varphi\| = 1 - \|\varphi\|,\ \|\varphi_0 \to \varphi_1\| = \min(1, 1 - \|\varphi_0\| + \|\varphi_1\|),$
(3) $\|(\forall x)\varphi(x)\| = \inf\{\|\varphi(a)\|_{\mathbf{M}} : a \in \|\mathbf{M}\|\}$

- **ŁQ** 上で公理として包括原理のみを持つ集合論を **H** と呼ぶ (**H** は無矛盾 [Whi79])。

- **ŁQ** は包括原理を仮定しても矛盾を起こさない論理の中で、**もっとも古典論理に近い（証明力の強い）**ものの一つ

2.3 超準的自然数の存在

Theorem 2.3.1 H では、**「ω は必ず超準的な自然数を含む」**と解釈できる文章が証明可能である。

- n が**標準的な自然数**とは n が $0, 1, 2, 3, \cdots$ であることをいう。標準的な自然数のみで領域が構成される算術のモデルを $\mathbb{N}$ で表し、標準モデルと呼ぶ。
- $\mathbb{N}$ 以外の算術のモデルを超準モデルと呼び、超準モデルの元で標準的でない自然数のことを**超準的な自然数**と呼ぶ

d が超準的自然数の時、任意の標準的自然数 n に対して $n < d$ が成立する。

proof 任意の自然数 m に $\to_m$ を以下のように再帰的に定義する。

- $A \to_0 \neg A$ は $\neg A$ で定義し、
- 任意の $i < m$ にたいし、$A \to_{i+1} \neg A$ は、 $A \to (A \to_i \neg A)$ で定義する。

Claim 2.3.2 任意の標準的な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に以下が成立する。

$$\|A \to_n \neg A\|_{\mathbf{M}} = \min\{(n+1)(1 - \|A\|_{\mathbf{M}}), 1\}$$

ω が標準的な自然数のみを含んでいると仮定する。

$$R_\omega = \{x : (\exists n)\, x \in x \to_n x \notin x\}$$

を定義すると、$\|R_\omega \in R_\omega\|_{\mathbf{M}}$ はいくつになるだろうか？

- $\|R_\omega \in R_\omega\|_{\mathbf{M}} = 1$ と仮定する。このとき

$$\begin{aligned}
\|R_\omega \in R_\omega\|_{\mathbf{M}} &= \|(\exists n)[R_\omega \in R_\omega \to_n R_\omega \notin R_\omega]\|_{\mathbf{M}} \\
&= \sup_{n\in\omega}\{\min\{(n+1)(1-\|R_\omega \in R_\omega\|_{\mathbf{M}}),\, 1\}\} \\
&= \sup_{n\in\omega}\{\min\{(n+1)\times 0,\, 1\}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり、矛盾である。

- 今度は $\|R_\omega \in R_\omega\|_{\mathbf{M}} = p < 1$ と仮定する。このとき、ある自然数 m が存在して、

  $m \times (1-p) \geq 1$ となるはずである。従って

$$
\begin{aligned}
\|R_\omega \in R_\omega\|_{\mathbf{M}} &= \|(\exists n)[R_\omega \in R_\omega \to_n R_\omega \notin R_\omega]\|_{\mathbf{M}} \\
&= \sup_{n\in\omega}\{\min\{(n+1)(1-\|R_\omega \in R_\omega\|_{\mathbf{M}}),\, 1\}\} \\
&= \sup_{n\in\omega}\{\min\{(n+1)(1-p),\, 1\}\} \\
&\geq \min\{m \times p,\, 1\} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

  より、こちらも矛盾である。

2.3.1 $\to_m$ のフォーマルな定義

フォーマルには、上の $\to_m$ は帰納定理を使って定義できる。term θ を以下のように定義しよう。

$$
\begin{aligned}
\langle n, x\rangle \in \theta \Longleftrightarrow & [n = \emptyset \wedge x \notin x] \\
& \vee[(\exists\, k \in \omega)\, n = \{k\} \wedge (x \in x \to \langle k, x\rangle \in \theta)]
\end{aligned}
$$

つまり $\langle n, x\rangle \in \theta$ は $x \in x \to_n x \notin x$ を表す。

このとき以下のように書ける。

$$R_\omega = \{x : (\exists n \in \omega)\langle n, x\rangle \in \theta\}$$

2.3.2 Paradox（のように見えるもの）の解決

この paradox の解決策は以下の通りである。

- $\|R_\omega \in R_\omega\|_{\mathbf{M}} = 1$ が成立
- 標準的な自然数 n に対しては、$\|\langle n, R_\omega\rangle \in \theta\| = 0$
- ω は実は超準的な自然数 d を含んでおり、

$$\|\langle d, R_\omega\rangle \in \theta\| > 0$$

以上により、

- $\langle d, R_\omega \rangle \in \theta$ は「d は超準的な自然数」と解釈できる
- また $\|R_\omega \in R_\omega\|_{\mathbf{M}} = 1$、つまり $(\exists n)\langle n, R_\omega \rangle \in \theta$ はいつも真理値が 1 である（つまり **ŁQ** で証明可能である）。

ということになるため、

H から「ω は必ず超準的な自然数を含む」と解釈できる文章が証明可能である。□

2.4 系: 帰納法が矛盾を導出

Theorem 2.4.1 **H** に induction scheme on ω を付け加えると矛盾を起こす。

- ただし induction scheme on ω とは、任意の formula φ にたいし、

$$\frac{(\forall n \in \omega)[\varphi(n) \leftrightarrow \varphi(n+1)]}{(\forall x)[x \in \omega \to \varphi(x)]}$$

- この定理は Hajek による定理 (**Ł**∀ 上の包括原理を持つ集合論 $\mathbf{CŁ}_0$ 上で induction scheme on ω は矛盾を導く）の analogy となっている。

proof induction scheme を仮定しよう。先ほどは $\|R_\omega \in R_\omega\| = 1$ を証明した。このとき

- $\|R_\omega \in R_\omega \to_0 R_\omega \notin R_\omega\| = \|R_\omega \notin R_\omega\| = 0$,
- $\|R_\omega \in R_\omega \to_n R_\omega \notin R_\omega\| = p$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\|R_\omega \in R_\omega \to_{n+1} R_\omega \notin R_\omega\| &= \| \underbrace{R_\omega \in R_\omega}_{\text{真理値 } 1} \to \underbrace{(R_\omega \in R_\omega \to_n R_\omega \notin R_\omega)}_{\text{真理値 } p} \| \\
&= \min\{1, 1-1+p\} = p
\end{aligned}
$$

となり、induction より $(\forall x)[x \in \omega \to \neg(R_\omega \in R_\omega \to_x R_\omega \notin R_\omega)]$ が証明可能である。

ということは $R_\omega \notin R_\omega$ が証明されたということになるが、これは我々の仮定に反する。

$\square$

定理 2.4.1 証明のポイント

- 古典論理上の Peano 算術
  - 数学的帰納法は整合的
  - そのため体系内では超準的自然数を区別できない

    述語 $P(x)$ を $\mathbf{PA}$ で定義不可能 (ただし “$P(n) \;\text{ iff }\; n$ は超準的自然数” となる)

- $\mathbf{H}$ 上の算術
  - 体系内である程度超準的自然数を区別できる

    n が超準的ならば $\|\langle n, R_\omega\rangle \in \theta\| > 0$

  - 数学的帰納法は矛盾を導く

3 Conclusion

- Łukasiewicz 無限値述語論理 **ŁQ** で包括原理を仮定した場合、「自然数の集合 ω は必ず超準的な元を含む」と解釈できる文が証明可能であることを示した。
- これは **H** は古典数学と整合的（つまり古典数学では証明できない定理がその集合論で証明されることはない）ではないということを示す。
- そしてこれは包括原理の下での集合概念が予想以上に複雑であり、古典的数学を **H** で展開したいという希望に否定的な結論を与える。

参考文献

[Can03] Andrea Cantini. "The undecidability of Grisˇin's set theory" Studia logica 74 (2003) pp.345-368

[Gir87] Jean-Yves Girard. "Linear Logic" Theoretical Computer Science, London Mathematical 50:1, pp. 1-102, 1987.

[Gri82] Grisˇin, V. N. 1982. Predicate and set-theoretic caliculi based on logic without contractions. *Math. USSR Izvestija* 18: 41-59.

[Hay63] Louise Schmir Hay. "Axiomatization of the Infinite-Valued Predicate Calculus" Journal of Symbolic Logic, 28(1) (1963) pp.77-86

[Yat05] Shunsuke Yatabe "A note on Hajek, Paris and Shepherdson's theorem" Logic Journal of IGPL, pp.261-266, vol. 13(2), March 2005.

[Whi79] Richard B. White. "The consistency of the axiom of comprehension in the infinite-valued predicate logic of Łukasiewicz" Journal of Philo. Logic, 8 (1979) pp.509-534

Faculty of Engineering, Kobe University

Kobe 657-8501, Japan

yatabe@kurt.scitec.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~yatabe/index-jp.html